THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE

DE GRENOBLE

par

Bruno SOUBEYRAN

SUR CERTAINS PLANS PROJECTIFS NON ARGUESIENS ET LES SYSTEMES QUI LES COORDONNENT

Préparée dans le Laboratoire de Mathématiques Pures, associé au CNRS,

Soutenue le 18 octobre 1973 devant la commission d'examen

Président: C. CHABAUTY Examinateurs: E. LUTZ
J.R. JOLY

THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Bruno SOUBEYRAN

SUR CERTAINS PLANS PROJECTIFS NON ARGUESIENS ET LES SYSTEMES QUI LES COORDONNENT

Préparée dans le Laboratoire de Mathématiques Pures, associé au CNRS,

Soutenue le 18 octobre 1973 devant la commission d'examen

Président : C. CHABAUTY Examinateurs : E. LUTZ
J.R. JOLY

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

SOMMAIRE

Pages

INTRODUCTION

CHAPITRE I. Plans projectifs et plans affines 1

1. Définitions 1
2. Collinéations centrales 3
3. Transitivité 4
4. Coordination d'un plan projectif 7

CHAPITRE II. Plans de Hilbert 16

1. Construction des plans de Hilbert 16
2. Collinéations des plans de Hilbert 20
3. Plans projectifs ayant un groupe de collinéations donné 25
4. Isomorphismes des plans de Hilbert 27

CHAPITRE III. Systèmes de Veblen-Wedderburn quadratiques 30

1. Rappels 30
2. Systèmes V.W quadratiques 33

CHAPITRE IV. Dérivation 43

1. Cas fini : Dérivation d'Ostrom 43
2. Extension au cas infini 44
3. Dérivation dans les semi-corps 49

CHAPITRE V. Systèmes de Cayley-Dickson généralisés 60

1. Propriétés algébriques des systèmes (F,σ,f) 60
2. "Géométricité" des systèmes (F,σ,f) 64

.../...

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544319_0027

3 . Construction d'une nouvelle classe de semi-corps dérivables 68
4. Dérivés des semi-corps de Cayley-Dickson généralisés 71

INDEX DES NOTATIONS 75

INDEX TERMINOLOGIQUE 76

LEXIQUE 77

BIBLIOGRAPHIE 78

-o00o-

A mes parents,

Je dois beaucoup à Monsieur C. CHABAUTY dont la profonde vision mathématique m'a beaucoup marqué. Il m'a donné l'idée de ce travail et sans son aide et ses encouragements, je n'aurai pu mener celui-ci à bien. Je lui exprime toute ma reconnaissance.

Mademoiselle E. LUTZ, au cours de nombreux entretiens, m'a donné de précieux conseils et Monsieur J.R. JOLY m'a offert l'hospitalité de son séminaire pour y parler de géométrie projective. Je suis très heureux que tous deux aient bien voulu faire partie du Jury et je les en remercie.

Tous mes remerciements vont aussi à Madame GUTTIN-LOMBARD et Monsieur GIRARD qui se sont occupés avec toutes leurs gentillesse et compétence habituelles de la réalisation matérielle de ce travail.

INTRODUCTION

Pour un espace projectif à $n \geq 3$ dimensions, il existe un corps (gauche) K tel que l'espace soit isomorphe à $P_n(K)$, c'est-à-dire à K^{n+1} privé de l'origine et soumis à un passage au quotient. Par contre, ceci n'est plus valable lorsque $n = 2$. Les plans projectifs du type $P_2(K)$, K corps gauche, constituent une catégorie particulière de plans projectifs. Ils sont caractérisés par la propriété que pour tout point P et toute droite ℓ, le groupe des automorphismes du plan laissant invariant chaque point de la droite ℓ et chaque droite passant par le point P est, dans un sens convenable, maximal. Ces plans sont appelés plans arguésiens. C'est Hilbert le premier qui mit en évidence des plans projectifs non arguésiens (1899).

Dans le cas général, on peut encore associer au choix d'un repère $\mathcal{R}$ dans un plan projectif π, un système algébrique, appelé ternaire, qui joue le rôle du corps dans lequel sont prises les coordonnées dans le cas arguésien. On a pu établir une classification assez raisonnable des plans projectifs suivant les structures possibles de l'ensemble $C(\pi)$ des automorphismes "distingués" (élations et homologies) qu'il admet (classification de Lenz-Barlotti : voir [D] p.124 ou théorème I, du chapitre I de ce travail).

Ces classes peuvent être caractérisées par les axiomes auxquels satisfait le ternaire associé à un repère convenablement choisi. En un certain sens, les classes sont d'autant mieux connues qu'elles ont une famille plus riche d'automorphismes et par conséquent sont associées à des ternaires plus voisins des corps (gauches).

La classe de Lenz-Barlotti la plus pauvre en automorphismes (classe I_1) est définie comme la classe des plans projectifs n'ayant aucun groupe d'élations ou d'homologies, "maximal". L'exemple de plan non arguésien

donné par Hilbert dans la première édition de sa géométrie est obtenu en modifiant la géométrie du plan réel ordinaire à l'intérieur d'une ellipse de ce plan. Dans les éditions ultérieures, cet exemple est remplacé par un autre plus facile à construire, le plan de Moulton. Le plan construit par Hilbert a l'intérêt d'appartenir à la classe I_1 dont il est le représentant classique ([D] p.124). Il nous a paru intéressant de raffiner un peu la classification de Lenz-Barlotti et de chercher un exemple de plan projectif "rigide", c'est-à-dire dont le groupe des automorphismes est réduit à l'identité. Nous avons montré que le plan de Hilbert à peine modifié est un plan rigide. Nous avons montré aussi qu'en "itérant" la "modification locale" qui donne lieu à ce plan, on pouvait obtenir un plan projectif dont le groupe des automorphismes est isomorphe à certains groupes, en particulier les groupes cycliques et dihédraux. Ces résultats, bien que s'étant (au moins en partie) avérés connus ([Sa] p.2) ne semblent cependant pas avoir été publiés. La construction de ces plans que nous appelons "plans de Hilbert", constitue la première partie de ce travail.

Dans une seconde partie, nous apportons une contribution à l'étude d'une classe importante de plans projectifs : les plans de translation. Ils sont caractérisés par le fait qu'ils peuvent être "coordonnés" par des ternaires, appelés systèmes de Veblen-Wedderburn à droite, vérifiant tous les axiomes des corps sauf peut-être l'associativité de la multiplication et la distributivité à gauche de celle-ci par rapport à l'addition. Un des objectifs actuels de la géométrie projective plane est la classification complète des plans de translation et aussi, ce qui n'est pas équivalent (puisque deux systèmes de Veblen-Wedderburn non isomorphes peuvent coordonner le même plan), celle des systèmes de Veblen-Wedderburn. C'est d'ailleurs dans ce cadre que se place le célèbre théorème de Bruck-Kleinfeld déterminant tous les semi-corps (c'est-à-dire les systèmes vérifiant tous les axiomes des corps sauf peut-être l'associativité de la multiplication) alternatifs (c'est-à-dire tels que deux éléments "engendrent" un corps). De tels semi-corps sont ou bien associatifs ou bien de dimension 8 sur leur centre et obtenus à partir de celui par la construction de Cayley-Dickson. Cette construction est une extension

de celle qui fait passer des réels aux complexes, des complexes aux quaternions, des quaternions aux octaves de Cayley.

Parmi les systèmes de Veblen-Wedderburn (à droite), il en est de particulièrement intéressants : ce sont les systèmes de Veblen-Wedderburn "quadratiques", c'est-à-dire qui possèdent une structure d'espace vectoriel de dimension 2 sur un certain corps F . Bien que paraissant beaucoup plus simple, le problème de déterminer ces systèmes et les plans qu'ils coordonnent, reste encore largement ouvert. C'est dans ce cadre que se place notre étude.

Une classe importante de systèmes de Veblen-Wedderburn quadratiques est celle des systèmes de Hall ([Ha] p.364). Ceux-ci sont des "extensions" d'un corps commutatif F par un polynôme irréductible $f(X)$ sur F , dans le sens suivant : (A) Tout élément n'appartenant pas au corps F est racine du polynôme $f(X)$ et (B) Le groupe des automorphismes du système laissant le corps F fixe élément par élément, est transitif sur les éléments qui ne sont pas dans F . Nous avons essayé dans cette seconde partie de généraliser les systèmes de Hall en partant de l'une ou l'autre des conditions (A) et (B) ci-dessus. Les plans projectifs coordonnés par deux systèmes de Hall, extensions d'un même corps F par des polynômes distincts, étant toujours isomorphes, on peut se restreindre, en caractéristique différente de 2, au cas des extensions par des polynômes $X^2 - s$. Dans de tels systèmes, tout élément x non dans F est tel que : $x^2 = s \in F$.

Nous nous posons alors le premier problème suivant, (P_1) :

Quels sont les systèmes V.W. quadratiques sur un corps commutatif F tels que tout élément non dans le corps F ait un carré qui appartienne à ce corps ? Nous ne résolvons pas ce problème dans le cas général. Cependant dans le cas où (Problème P'_1) nous imposons au corps F d'avoir son groupe des carrés non nuls d'indice 2 dans son groupe multiplicatif et nous demandons que tout élément $x = \alpha + \beta t$ du système de Veblen-Wedderburn ait non seulement un carré dans F , mais encore que ce carré ne dépende que de la composante β , alors nous pouvons décrire le système de Veblen-Wedderburn en question à l'aide d'une certaine permutation décroissante σ

du corps F (c'est-à-dire telle que le produit $[\sigma(x)-\sigma(y)][x-y]$ soit toujours nul ou non carré). Les permutations décroissantes des corps finis de caractéristique différente de 2 ayant été toutes déterminées ([Ca]), le problème P'_1 est entièrement résolu dans le cas fini. On voit que les systèmes de Veblen-Wedderburn solutions sont des systèmes connus par ailleurs et construits d'une manière tout à fait indépendante ([O.M]). Dans le cas infini les systèmes obtenus paraissent être nouveaux.

Nous nous occupons ensuite du deuxième problème, à savoir : donner une généralisation des systèmes de Hall basée sur la propriété (B) de transitivité du groupe des automorphismes.

Une première méthode pour résoudre ce problème est de travailler directement sur les systèmes de Veblen-Wedderburn et les plans qu'ils coordonnent. C'est ce que fait Kirkpatrick ([Ki]). Il construit une classe de systèmes de Veblen-Wedderburn finis, de caractéristique $\neq 2$, vérifiant la condition (B) ci-dessus et coordonnant des plans comprenant ceux de Hall (finis).

Une deuxième méthode est basée sur une technique très puissante pour construire de nouveaux plans à partir d'anciens : la dérivation. Cette construction donnée sous forme géométrique par Ostrom (1961), puis traduite sous forme algébrique par Albert ([A]), s'applique à certains plans (respectivement ternaires) finis d'ordre q^2 ($q = p^h$, p entier premier) et possède en particulier la propriété que le dérivé d'un plan de translation (respectivement : système de Veblen-Wedderburn à droite) est encore un plan de translation (respectivement : système de Veblen-Wedderburn à droite). Or, il se trouve que tous les corps finis d'ordre carré sont "dérivables" et qu'il y a identité entre la classe de leurs dérivés et celle des systèmes de Hall (finis). Il est alors naturel de se demander quels sont, plus généralement, les semi-corps dérivables dont les dérivés vérifient la propriété (B). Ceci est le point de départ de la suite de notre travail.

Nous avons d'abord essayé d'étendre au cas infini la notion de ternaire dérivable et de ternaire dérivé. Cependant, alors que le dérivé d'un ternaire dérivable fini est "géométrique", c'est-à-dire coordonne toujours

un plan projectif, il n'en est pas nécessairement de même dans le cas infini. Notre étude est alors guidée par le fait suivant : dans un article de synthèse sur les semi-corps finis ([Kn]), Knuth étudie en particulier (sans aucune allusion à la dérivation), une certaine classe de semi-corps quadratiques qui se trouvent être pratiquement la classe des semi-corps dérivables finis. Il montre qu'un semi-corps d'ordre q^2 de cette classe peut être identifié à un espace vectoriel de dimension 2 sur $F = GF(q^2)$, muni d'un produit $p(\sigma,\varphi,\psi)$ dépendant d'un automorphisme σ du corps F et de deux applications bilinéaires (sur le sous-corps premier de F) φ et ψ de $F \times F$ dans F. Il donne ensuite, dans certains cas particuliers, des conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (F,σ,φ,ψ) formé par un espace vectoriel de dimension 2 sur F et d'un produit $p(\sigma,\varphi,\psi)$ soit un semi-corps. Les semi-corps ainsi obtenus s'avèrent être les seuls exemples de semi-corps dérivables connus jusqu'ici.

La vérification du fait que les semi-corps infinis du type (F,σ,φ,ψ), F corps commutatif, sont encore dérivables, nous conduit à nous restreindre (dans le cas infini), au problème (P_2) suivant : quels sont les semi-corps finis ou infinis, du type (F,σ,φ,ψ), F corps commutatif, dont les systèmes dérivés satisfont la condition (B) ?

Nous commençons par donner une caractérisation (portant sur les applications φ et ψ) des semi-corps du type (F,σ,φ,ψ), solutions du problème (P_2). Ceci nous définit une classe de systèmes comprenant ceux obtenus par la construction de Cayley-Dickson (déjà citée). Ces systèmes sont par la suite appelés systèmes de Cayley-Dickson généralisés.

Pour résoudre le problème (P_2) il nous reste à répondre aux deux questions suivantes :

1) quels sont les systèmes de Cayley-Dickson généralisés qui sont des semi-corps et

2) parmi ces semi-corps quels sont ceux dont les dérivés sont géométriques ?

Pour répondre à ces questions nous nous limitons aux systèmes de Cayley-Dickson généralisés du type (F,σ,φ,ψ) avec $\psi \equiv 0$. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que de tels systèmes soient des semi-corps.

Ceci nous permet d'exhiber une nouvelle classe de semi-corps dérivables finis (coordonnant des plans projectifs qui ne sont isomorphes à aucun des plans dérivables de Knuth cités plus haut).

Pour terminer, nous montrons que les dérivés des semi-corps de Cayley-Dickson généralisés du type $(F,\sigma,\varphi,0)$, F corps commutatif, sont toujours géométriques (c'est-à-dire, dans ce cas, sont des systèmes de Veblen-Wedderburn à droite). Comme les systèmes de Kirkpatrick se trouvent être les dérivés de certains semi-corps de Cayley-Dickson généralisés $(F,\sigma,\varphi,0)$ finis, nous obtenons ainsi, non seulement une généralisation de ces systèmes dans le cas fini, mais aussi une extension au cas infini.

Ceci apporte de nouveaux exemples dans l'étude systématique entreprise par Johnson [J] des plans projectifs dérivés des plans coordonnés par des semi-corps dérivables.

Dans le chapitre I nous rappelons les définitions et les résultats classiques sur les plans projectifs et leurs automorphismes, dont nous avons besoin. On trouvera pratiquement toutes les démonstrations de ces résultats dans l'exposé de M. Hall, chapitre 20 de son livre sur la théorie des groupes ([Ha]).

Dans le chapitre II nous construisons des exemples de plans projectifs rigides et apparentés que nous appelons "plans de Hilbert".

Dans le chapitre III, après un bref rappel sur les systèmes de Veblen-Wedderburn et les systèmes de Hall, nous donnons une caractérisation des systèmes de Veblen-Wedderburn quadratiques. Nous utilisons ce résultat pour construire de nouveaux systèmes de Veblen-Wedderburn, dont une généralisation des systèmes de Hall relativement à la propriété (A) définie précédemment.

Dans le chapitre IV, nous étendons au cas infini la dérivation d'Ostrom puis nous étudions les semi-corps dérivables et les automorphismes de leurs dérivés. Nous définissons la classe des systèmes de Cayley-Dickson généralisés, puis nous terminons le chapitre en donnant des conditions pour qu'un système de Veblen-Wedderburn à droite dérivable dérive d'un semi-corps (respectivement : d'un semi-corps de Cayley-Dickson généralisé, d'un corps).

Dans le chapitre V, nous étudions plus en détail les systèmes de Cayley-Dickson généralisés définis au chapitre précédent. Nous déterminons leurs différents noyaux puis donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces systèmes soient des semi-corps. Nous appliquons ces résultats à la construction de nouveaux semi-corps dérivables. Nous montrons enfin que les dérivés des semi-corps de Cayley-Dickson généralisés sont toujours géométriques, obtenant ainsi une généralisation des systèmes de Kispatrick et des systèmes de Hall.

La terminologie relative aux systèmes algébriques servant à "coordonner" les plans projectifs n'est pas entièrement fixée. Après l'index terminologique (p. 76) et l'index des notations (p. 75) on trouvera un bref lexique. (p. 77)

-o-o-o-

CHAPITRE I

PLANS PROJECTIFS ET PLANS AFFINES

Nous donnons dans ce chapitre les définitions et les propriétés les plus classiques relatives aux plans projectifs et aux plans affines.

§1 - DEFINITIONS.

Définition I.

Un plan projectif est un triplet $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \varepsilon)$ où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont deux ensembles (dont les éléments sont appelés respectivement : "points" et "droites") et ε une relation entre points et droites (c'est-à-dire : $\varepsilon \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$; "$P \in \ell$" se lisant : "P est sur ℓ" , ou "ℓ passe par P", ou encore : "ℓ contient P"), tel que les axiomes suivants soient vérifiés.

P_1 : Par deux points distincts il passe une et une seule droite.
P_2 : Deux droites distinctes contiennent un et un seul point commun.
P_3 : Il existe quatre points non alignés trois à trois.
(Par "alignés" nous entendons "sur une même droite").

Notations.

Les points seront notés par des majuscules : A , B ,... , les droites par des minuscules a,b,... . La droite passant par les points A et B (distincts) sera notée : AB . Le point commun aux deux droites a et b (distinctes) sera noté $a \cap b$.

Exemple :

Si K est un corps gauche, le système dont les points sont ceux de K^3 , les droites les hyperplans de K^3 considéré comme espace vectoriel à gauche

sur K , muni de la relation d'appartenance, est un plan projectif, noté $P_2(K)$.

Définition II.

Etant donné un plan projectif $\pi = (\mathcal{P},\mathcal{L},\varepsilon)$, le système $\pi^* = (\mathcal{P}^*,\mathcal{L}^*,\varepsilon^*)$ défini par : $\mathcal{P}^* = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^* = \mathcal{P}$ et $\ell\varepsilon^*P \Leftrightarrow P\varepsilon\ell$, est aussi un plan projectif appelé dual du plan π .

Il est souvent commode, quand on veut particulariser une droite d'un plan projectif, de travailler sur la structure affine correspondante.

Définition III.

Un plan affine est un triplet $\pi = (\mathcal{P},\mathcal{L},\varepsilon)$, où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont deux ensembles (ensemble des "points" et ensemble des "droites" respectivement) reliés par une relation ε (c'est-à-dire : $\varepsilon \subset \mathcal{P}\times\mathcal{L}$) tels que :

A_1 : Par deux points distincts, il passe une et une seule droite.

A_2 : Par un point pris hors d'une droite, il passe une et une seule parallèle à celle-ci (c'est-à-dire sans point commun avec celle-ci).

A_3 : Il existe quatre points non alignés trois à trois.

Remarque.

Si $\pi = (\mathcal{P},\mathcal{L},\varepsilon)$ est un plan projectif et ℓ une droite de ce plan, le système π_ℓ dont les points sont ceux de π non sur ℓ , et les droites, celles de π distinctes de ℓ , muni de la restriction de la relation ε aux ensembles correspondants, est un plan affine. Réciproquement si $\pi = (\mathcal{P},\mathcal{L},\varepsilon)$ est un plan affine, l'adjonction d'une nouvelle droite et d'un nouveau point par chaque classe de parallèles, fournit un plan projectif appelé : complétion projective de ce plan affine.

Si K est un corps gauche le système dont les points sont ceux de $K\times K$ et les droites, les sous-ensembles $x = a$ et $y = xm + b$ de $K\times K$ est un plan affine noté $A_2(K)$.

Définition IV.

Soient $\pi = (\mathcal{P},\mathcal{L},\epsilon)$ et $\pi' = (\mathcal{P}',\mathcal{L}',\epsilon')$ deux plans projectifs. Un isomorphisme de π sur π' est une bijection φ de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$, transportant trois points alignés dans π en trois points alignés dans π'. Un automorphisme d'un plan projectif π est un isomorphisme de π sur lui-même. On dit encore collinéation de π.

Le groupe des collinéations d'un plan projectif π sera noté $\mathrm{Aut}(\pi)$.

Dans le cas fini, on montre ([Ha] p.392) :

Proposition I.

Si π est un plan projectif fini, il existe un entier $n \geq 2$ tel que : 1°) toute droite contient $n+1$ points, 2°) tout point est sur $n+1$ droites, 3°) il y a n^2+n+1 points, 4°) il y a n^2+n+1 droites.

Définition V.

L'entier n défini à la proposition I, s'appelle l'ordre du plan π.

§2 - COLLINEATIONS CENTRALES.

Définition VI.

Soit φ une collinéation d'un plan projectif π. Un point P est un centre de φ si toute droite passant par P est laissée globalement invariante par φ. Dualement, une droite ℓ est un axe de φ si tout point de ℓ est invariant par φ. Une collinéation est dite centrale si elle possède un axe et un centre. Par $P.\ell$ collinéation centrale nous désignerons une collinéation ayant P pour centre et ℓ pour axe.

On montre ([Ha] p. 356-357-358) :

Proposition II.

Pour qu'une collinéation ait un centre, il faut et il suffit qu'elle ait un axe.

Proposition III.

Soient φ et ψ deux P.ℓ collinéations centrales. S'il existe un point X_o, distinct de P et non sur ℓ, (respectivement : une droite ℓ_o, distincte de ℓ et ne passant pas par P) tel que $\varphi(X_o) = \psi(X_o)$ (respectivement $\varphi(\rho_o) = \psi(\rho_o)$) alors $\varphi = \psi$.

Proposition IV.

Si une collinéation a plus d'un centre ou plus d'un axe, c'est l'identité.

Nous pouvons donc parler du centre et de l'axe d'une collinéation centrale distincte de l'identité. Deux cas se présentent :

Définition VII.

Soit φ une P.ℓ collinéation centrale. Si le point P est sur la droite ℓ, φ est appelée une élation ; dans le cas contraire, φ est appelée une homologie.

Définition VIII.

Soit π un plan projectif. Le sous-groupe de $Aut(\pi)$ engendré par les collinéations centrales est appelé groupe projectif, celui engendré par les élations est appelé petit groupe projectif.

§3 - TRANSITIVITE.

Définition IX (Baer).

Soit P un point et ℓ une droite d'un plan projectif π. On dit que π est P.ℓ transitif si pour tout couple de points (X,Y) de π, tels que : $P \in XY$, $P \neq X \neq Y \neq P$, $X \notin \ell$, $Y \notin \ell$, il existe une P.ℓ collinéation centrale φ, telle que $\varphi(X) = Y$.

En d'autres termes, un plan projectif est P.ℓ transitif s'il admet toutes les P.ℓ collinéations centrales possibles.

Nous avons la propriété équivalente suivante ([Ha] p. 353) :

Proposition V.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan projectif π soit P.ℓ transitif est que chaque fois que deux triangles (A,B,C) et (A',B',C') sont en perspective depuis le point P , c'est-à-dire sont tels que : P = AA' $\cap$ BB' $\cap$ CC' , alors ils sont aussi en perspective depuis la droite ℓ , c'est-à-dire sont tels que les trois points AB $\cap$ A'B' , AC $\cap$ A'C' et BC $\cap$ B'C' appartiennent à ℓ .

Définition X.

Deux triangles (A,B,C) et (A',B',C') en perspective depuis un point P et depuis une droite ℓ sont dits former une configuration de Desargues.

Définition XI.

Un plan projectif qui est P.ℓ transitif pour tout point P et toute droite ℓ est dit arguésien.

On montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan projectif soit arguésien est qu'il soit isomorphe à un plan $P_2(K)$, pour un certain corps (gauche) K .

Lenz et Barlotti ont classé les plans projectifs suivant leur "richesse en transitivités" et ont obtenu le théorème suivant dans lequel on pose :

Définition XII.

Soit π un plan projectif. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des couples de points et droites (P,ℓ) tels que π est P.ℓ transitif.

Théorème I (Lenz-Barlotti).

Soit π un plan projectif et $\mathcal{T}$ l'ensemble défini ci-dessus. $\mathcal{T}$ est alors de l'une des formes suivantes :

I_1 : $\mathcal{T} = \phi$

I_2 : $\mathcal{T} = \{(P,\ell)\}$ $P \notin \ell$

I_3 : $\mathcal{T} = \{(A_i,a_i)\ i=1,2\}$ $A_i \notin a_i$, $A_i \in a_j$, $i \neq j$, $i,j = 1,2$

I_4 : $\mathcal{T} = \{(A_i,a_i)\ i=1,2,3\}$ $A_i \notin a_i$, $A_i \in a_j$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,3$

I_5 : $\mathcal{T} = \{(X,P\theta(X)),X\in\ell\}$ $P \notin \ell$, θ = permutation involutive de l'ensemble des points de ℓ .

I_6 : $\mathcal{T} = \{(X,\theta(X)),\ X\in\ell\ ,\ X\neq P\}$ $P \in \ell$, θ = bijection de l'ensemble des points de ℓ , distincts de P , sur l'ensemble des droites passant par P , distinctes de ℓ

I_7 : $\mathcal{T} = I_5 \cup \{(P,\ell)\}$

I_8 : $\mathcal{T} = \{(X,\theta(X)),$ X parcourt l'ensemble des points de $\pi\}$. θ = bijection de l'ensemble des points de π sur l'ensemble des droites de π , transformant trois points alignés en trois droites concourantes et telle que pour tout point X on ait : $X \notin \theta(X)$.

II_1 : $\mathcal{T} = \{(P,\ell)\}$ $P \in \ell$

II_2 : $\mathcal{T} = \{(P,\ell),(Q,m)\}$ $P = \ell \cap m$, $Q \in \ell$, $Q \notin m$

II_3 : $\mathcal{T} = I_6 \cup \{(P,\ell)\}$

III_1 : $\mathcal{T} = \{(X,PX),X\in\ell\}$ $P \in \ell$

III_2 : $\mathcal{T} = III_1 \cup \{(P,\ell)\}$

IVa_1 : $\mathcal{T} = \{(X,\ell),X\in\ell\}$

IVa_2 : $\mathcal{T} = \{(A,x),\ x\ni B\} \cup \{(B,y),\ y\ni A\}$ $A \neq B$

IVa_3 : $\mathcal{T} = \{(X,x),\ X\in\ell$ et $x\ni\theta(X)\}$ θ = permutation involutive sans point fixe de l'ensemble des points de ℓ

IVb_1 : $\mathcal{T} = \{(P,x),x\ni P\}$

IVb_2 : $\mathcal{T} = \{(X,a),X\in b\} \cup \{(Y,b),Y\in a\}$ $a \neq b$

IVb_3 : $\mathcal{T} = \{(X,x),x\ni P$ et $X \in \theta(x)\}$, θ permutation involutive sans point fixe de l'ensemble des droites de π passant par le point P .

V : $\mathcal{T} = \{(X,\ell),X\in\ell\} \cup \{(P,x),x\ni\ell\}$ $P \in \ell$

VI_a : $\mathcal{T} = \{(X,x),\ X\in x$ et $X\in\ell\}$

VI_b : $\mathcal{T} = \{(X,x),\ X\in x$ et $x\ni P\}$

VII_1 : $\mathcal{T} = \{(X,x),X\in x\}$

VII_2 : $\mathcal{T} = \{(X,x),\ X$ et x quelconques .

La démonstration de ce théorème s'appuie en particulier sur la proposition suivante :

Proposition VI.

Si π est un plan projectif P.ℓ transitif et si μ est une collinéation de π, π est aussi $\mu(p).\mu(\ell)$ transitif.

La partie du théorème 1 relative aux couples (P,ℓ) avec $P \in \ell$ est dûe à Lenz, le reste est dû à Barlotti ([B]).

Remarques.

1) On a pu montrer ultérieurement que les classes : I_5, I_7, I_8, II_2, II_3, VIa et VIb étaient vides. La seule classe laissant subsister un doute est la classe I_6.

2) Les classes IVb sont formées par les plans duaux des plans des classes IVa.

Si C est une des classes de Lenz-Barlotti, nous appellerons classe large définie par C, l'union des classes de Lenz-Barlotti, au-dessus de C dans la numérotation de Lenz-Barlotti.

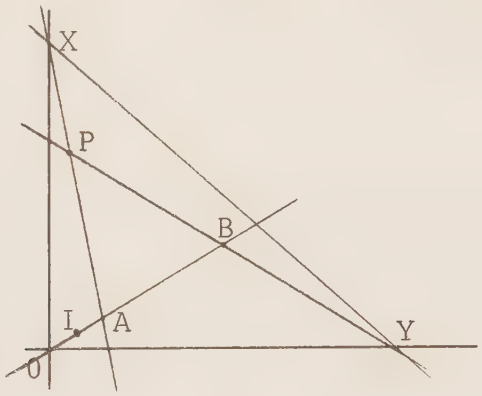
Les classes les plus étudiées sont les classes larges IVa et IVb. Un plan appartenant à la classe large IVa est dit de translation, et dual de translation s'il appartient à la classe large IVb.

Si l'on veut préciser, on dira plan de translation pour la droite ℓ (respectivement dual de translation pour le point P), c'est-à-dire plan P.ℓ transitif pour tout point P de la droite ℓ (respectivement toute droite ℓ passant par le point P).

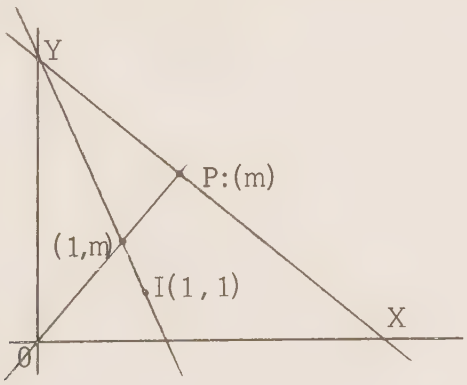
§4 - COORDINATION D'UN PLAN PROJECTIF.

Nous allons donner une description algébrique des plans projectifs (due à M. Hall).

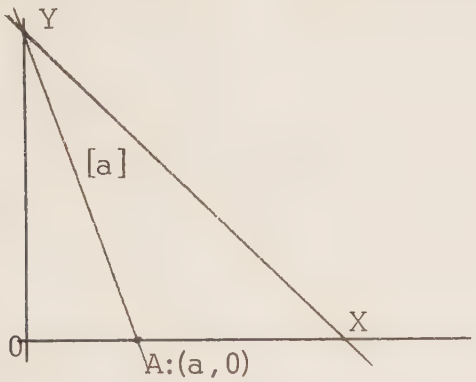
Soit π un plan projectif et $\mathfrak{R}$ un repère de π, c'est-à-dire : un quadruplet de points X,Y,O,I, non alignés trois à trois. La droite XY sera appelée droite à l'infini et notée : $[\infty]$. Le point Y sera noté : (∞). Choisissons alors un ensemble K équipotent à l'ensemble des points de OI, non sur $[\infty]$, suivant une bijection $K \ni x \to \alpha(x) \in OI$, et supposons que K contienne deux éléments 0 et 1, distincts, tels que $\alpha(0) = O$, $\alpha(1) = I$, mais que K ne contienne pas le symbole ∞. Nous allons d'abord repérer les points "affines" de π. Soit donc P un point de π non sur $XY = [\infty]$. Nous pouvons considérer les droites PX et PY, distinctes de OI, et leurs intersections avec OI : $A = PY \cap OI$ et $B = PX \cap OI$. Ces points n'étant pas sur XY, sont de la forme (unique) : $A = \alpha(a)$, $B = \alpha(b)$, $a,b \in K$. a et b s'appellent les coordonnées de P dans le repère $\mathfrak{R}$; a est l'abscisse de P, b son ordonnée et P est noté : (a,b).

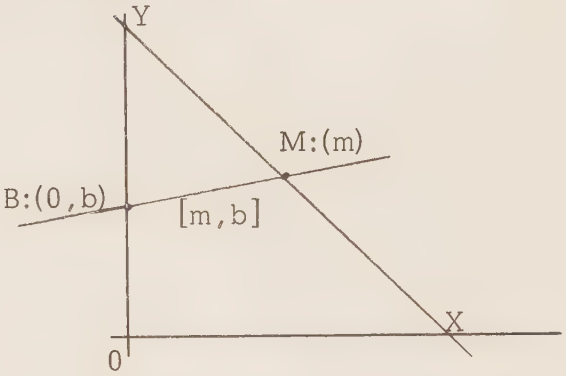


Ainsi O est le point (0,0), I le point (1,1). Il nous reste à repérer maintenant les points de la droite à l'infini. Y est déjà noté (∞). Soit donc $P \in XY$, $P \neq Y$; la droite PO coupe YI en un point (1,m) et P est alors noté : (m) ; en particulier X est noté : (0).

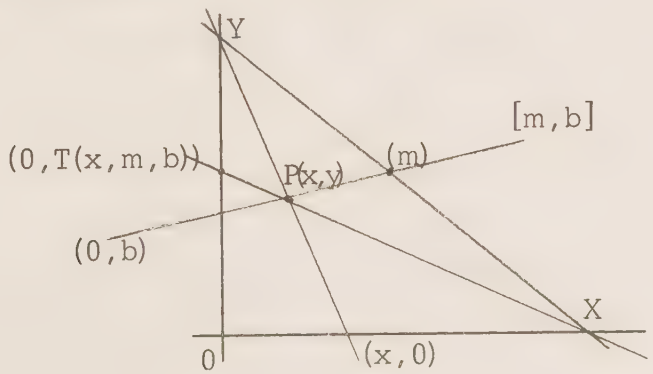


Repérons maintenant les droites de π . La droite XY est déjà notée $[\infty]$. Soit donc ℓ une droite non à l'infini. Si ℓ passe par Y , ℓ coupe alors OX en un point $A \neq X$, donc de la forme (a,O) et la droite : $\ell = YA$, est notée $[a]$. On dit encore que c'est la droite d'équation : $x = a$. Si ℓ ne passe pas par Y , ℓ coupe XY en un point $M \neq Y$, donc de la forme (m) , et coupe OY en un point $B \neq Y$, donc de la forme (O,b) . ℓ est alors notée $[m,b]$ et l'on dit que c'est la droite de pente m , d'ordonnée à l'origine b .





Le passage aux coordonnées nous définit par conséquent une bijection de l'ensemble des points de π (respectivement des droites de π) sur l'ensemble $(K \times K) \cup K \cup \{\infty\}$. Remarquons que si π est fini, K est fini, et l'ordre de π est le cardinal de K . Il s'agit maintenant de définir les droites (ne passant pas par Y) par une équation algébrique généralisant l'équation classique $y = xm + b$. Nous poserons donc : $(x,y) \in [m,b] \Leftrightarrow y = T(x,m,b)$ ce qui nous définit une loi T de $K^3 \to K$ par : T(x,m,b) est l'ordonnée du point P d'abscisse x sur la droite de pente m et d'ordonnée à l'origine b . La droite $[m,b]$ est alors appelée : droite d'équation $y = T(x,m,b)$



Un ensemble K muni d'une loi ternaire, c'est-à-dire d'une application $T : K^3 \to K$, est appelé anneau ternaire, ou tout simplement ternaire. Le ternaire (K,T) défini précédemment, est dit ternaire de coordination du plan π relativement au repère $\mathcal{R}(X,Y,O,I)$. Deux ternaires (K,T), (K',T'), de coordination du même plan π relativement à un même repère sont toujours isomorphes, c'est-à-dire : il existe une bijection F de K sur K', telle que : $F[T(x,y,z)] = T'[F(x),F(y),F(z)]$, pour tous x,y,z dans K.

Définition XIII.

Deux ternaires (K,T) et (K',T') sont isotopes, s'il existe trois bijections : F, G et H, de K sur K', telles que :

1) $H[T(x,y,z)] = T'[F(x),G(y),H(z)]$, $\forall x,y,z \in K$

2) $F(0) = G(0) = H(0) = 0$.

Le triplet (F,G,H) est appelé un isotopisme de K sur K'.

Si l'on prend $F = G = H$ nous retrouvons la définition d'un isomorphisme. Les autotopismes d'un ternaire (K,T), c'est-à-dire les isotopismes de (K,T) sur lui-même, forment un groupe pour la loi de composition : $(F,G,H)\circ(F',G',H') = (F\circ F', G\circ G', H\circ H')$. Nous donnerons plus loin la signification géométrique de l'isotopie.

Ternaires et plans projectifs sont liés par le théorème suivant ([Ha], p. 355) :

Théorème II (Hall).

Tout ternaire de coordination (K,T) vérifie les propriétés suivantes :

T_1 : $T(0,m,b) = T(m,0,b) = b$, $T(m,1,0) = T(1,m,0) = m$, $\forall m,b \in K$.

T_2 : $\forall a,b,c,d \in K$, $a \neq c$, il existe x unique dans K tel que : $T(x,a,b) = T(x,c,d)$

T_3 : $\forall a,b,c \in K$, il existe x unique dans K tel que : $T(a,b,x) = c$.

T_4 : $\forall a,b,c,d \in K$, $a \neq c$, il existe x et y uniques dans K tels que : $T(a,x,y) = b$ et $T(c,x,y) = d$.

Réciproquement, si (K,T) est un ternaire vérifiant T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , il existe un plan projectif π et un repère $\mathcal{R}$, tels que (K,T) soit le ternaire de coordination de π relativement à $\mathcal{R}$.

N.B. Pickert, contrairement à Hall et Dembowski, introduit une loi ternaire T^* par : $(x,y) \in [m,b] \Leftrightarrow b = T^*(m,x,y)$ c'est-à-dire : $T^*(m,x,y)$ est l'ordonnée à l'origine de la droite de pente m passant par le point (x,y) .

Définition XIV.

Un ternaire (K,T) est dit géométrique s'il vérifie les propriétés T_1 , T_2 , T_3 , T_4 du théorème II.

Revenons sur l'isotopie :

Proposition VII.

Soit π (respectivement π') un plan projectif coordonné dans le repère $\mathcal{R}(X,Y,O,I)$ (resp. $\mathcal{R}'(X',Y',O',I')$) par le ternaire (K,T) (resp. (K',T'))

i) une condition nécessaire et suffisante pour que les ternaires (K,T) et (K',T') soient isotopes est qu'il existe un isomorphisme φ de π sur π' tel que : $\varphi(X) = X'$, $\varphi(Y) = Y'$ et $\varphi(O) = O'$.

ii) une condition nécessaire et suffisante pour que les ternaires (K,T) et (K',T') soient isomorphes est qu'il existe un isomorphisme φ de π sur π' tel que : $\varphi(X) = X'$, $\varphi(Y) = Y'$, $\varphi(O) = O'$ et $\varphi(I) = I'$.

Pour une démonstration, voir par exemple [Kn] : théorèmes 3.3.1 et 3.3.2.

La proposition précédente montre en particulier :

1) Pour que tous les ternaires de coordination d'un même plan projectif π , soient isomorphes entre eux, il faut et il suffit qu'il existe un groupe de collinéations transitif sur les quadruplets de points non alignés trois à trois (ce qui est le cas par exemple pour les plans arguésiens).

2) Le groupe des autotopismes (respectivement automorphismes) du ternaire de coordination d'un plan projectif π relativement à un repère $\mathcal{R}(X,Y,O,I)$ est isomorphe au groupe des collinéations de π fixant les points : X , Y et O (respectivement : X , Y , O et I) .

Considérons un plan arguésien coordonné par le corps gauche $(K,+,\cdot)$. Tous les ternaires de coordination sont isomorphes au ternaire (K,T) défini à partir des lois "+" et "$\cdot$" par : $T(x,y,z) = x\cdot y + z$. Réciproquement les lois "+" et "$\cdot$" sont définies à partir de la loi "T" par : $x+y = T(x,1,y)$ et $x\cdot y = T(x,y,0)$. Par analogie nous poserons :

Définition XV.

Soit (K,T) un ternaire ; on appelle addition et multiplication déduites de T , les lois binaires sur K , "+" et "$\cdot$" , définies par : $x+y = T(x,1,y)$ et $x\cdot y = T(x,y,0)$.

Si l'on pose :

Définition XVI.

Une boucle est un ensemble S muni d'une loi de composition interne : "$\cdot$" , telle que : 1°) les équations : $a\cdot x = b$ et $x\cdot a = b$, ont une et une seule solution en x quels que soient a et b fixés. 2°) Il existe un élément neutre : 1 : $1\cdot x = x\cdot 1 = x$ pour tout x dans S .

On voit alors immédiatement que :

Proposition VIII.

Si (K,T) est un ternaire géométrique, les systèmes $(K,+)$ et $(K\setminus\{0\},\cdot)$ sont des boucles d'unités respectives 0 et 1 . De plus pour tout x dans K on a : $0\cdot x = x\cdot 0 = 0$.

Remarque.

Deux ternaires distincts (et même, non isotopes) peuvent très bien avoir les mêmes additions et multiplications : en effet prenons : $K = \mathbb{R}$, $T(x,y,z) = x\cdot y+z$ ("+" et "$\cdot$" étant les lois usuelles du corps des réels) et

$T_1(x,y,z) = T(x,y,z)$ si $x > 0$, $= [T(x^3,y^3,z^3)]^{1/3}$ si $x \leq 0$. Alors T et T_1 ont mêmes additions et multiplications, bien que n'étant pas isotopes.

Définition XVII.

Un ternaire (K,T) est dit linéaire si pour tous x,y,z dans K , l'on a : $T(x,y,z) = (x \cdot y)+z$.

Cela revient à dire que, dans le cas géométrique, les droites du plan qu'il coordonne sont de l'une des formes classiques : $y = (x \cdot m)+b$ ou $x = a$.

Il existe un lien étroit entre les propriétés algébriques des ternaires de coordination d'un plan π et les propriétés de transitivité de ce plan. En premier lieu nous avons :

Proposition IX.

Un plan projectif π est de translation pour une droite ℓ si et seulement si tous les ternaires de coordination relatifs aux repères ayant ℓ pour droite à l'infini, sont linéaires.

Afin de mieux préciser le lien ci-dessus, posons :

Définition XVIII.

Un système élatif (respectivement homologique) est un ternaire linéaire à addition (respectivement multiplication) associative. Un système de Veblen-Wedderburn, ou plus simplement système V.W., à droite (respectivement à gauche) est un système élatif distributif à droite (respectivement à gauche) c'est-à-dire : $(x+y) \cdot z = x \cdot z+y \cdot z$ (respectivement $z \cdot (x+y) = z \cdot x+z \cdot y$) pour tous x,y,z . Un nearfield à droite (respectivement à gauche) est un système V.W. à droite (respectivement à gauche) à multiplication associative. Un semi-corps ou anneau à division est un corps dans lequel la condition : "la multiplication est une loi de groupe" est remplacée par : "la multiplication est une boucle". On peut dire encore qu'un semi-corps est un système V.W. à droite distributif à gauche.

Un semi-corps est dit associatif pour les puissances si les différentes puissances d'un même élément s'associent entre elles, et alternatif si l'on a toujours : $a^2 \cdot x = a \cdot (a \cdot x)$ et $x \cdot a^2 = (x \cdot a) \cdot a$. Un système considéré dans son sens strict sera dit pur. (par exemple, un système V.W. à droite pur sera supposé non distributif à gauche et à multiplication non associative).

Théorème III.

Soit π un plan projectif et (K,T) le ternaire de coordination de π relatif à un repère $\mathcal{R}(X,Y,O,I)$. Alors :

1°) (K,T) est un système homologique $\Leftrightarrow$ π est $X.OY$ transitif.

2°) (K,T) est un système élatif $\Leftrightarrow$ π est $Y \cdot XY$ transitif.

3°) (K,T) est un système V.W. à droite $\Leftrightarrow$ π est $P \cdot XY$ transitif pour tout point $P \in XY$.

4°) (K,T) est un système V.W. à gauche $\Leftrightarrow$ π est $Y \cdot \ell$ transitif pour toute droite ℓ passant par le point Y .

5°) (K,T) est un nearfield à droite $\Leftrightarrow$ π est $X \cdot OY$ transitif et $P \cdot XY$ transitif pour tout point $P \in \ell$.

6°) (K,T) est un semi-corps $\Leftrightarrow$ π est $P \cdot XY$ transitif pour tout point $P \in XY$ et $Y \cdot \ell$ transitif pour toute droite ℓ contenant Y .

7°) (K,T) est un semi-corps alternatif $\Leftrightarrow$ π est $P \cdot XY$ et $Q \cdot OY$ transitif, pour tous points $P \in XY$, $Q \in OY$.

8°) (K,T) est un corps gauche $\Leftrightarrow$ π est $P \cdot XY$ transitif pour tout point $P \in XY$, $Y \cdot \ell$ transitif pour toute droite ℓ contenant Y , et $X \cdot OY$ transitif .

On peut trouver une démonstration de ces différentes équivalences dans [Ha], pages 360 à 374.

Remarques.

1) La terminologie : "système élatif", "système homologique", est justifiée par le théorème 3. Dans [D] et [P] un système élatif est appelé : "groupe cartésien", et un système homologique n'a aucun nom spécial.

2) On peut montrer que si un plan est de translation pour deux droites distinctes, il est de translation pour toutes ses droites. Ainsi, pour un plan coordonné par un semi-corps alternatif, tous les ternaires de coordination sont des semi-corps alternatifs (isomorphes).

3) Un plan projectif peut avoir d'autres collinéations que celles apparaissant dans l'ensemble $\mathcal{T}$ (définition 11) qui lui est associé. Mais alors celles-ci sont assujetties à laisser invariant $\mathcal{T}$ (d'après la proposition VI). Par exemple, un plan de la classe I_1 ($\mathcal{T} = \phi$) peut avoir des collinéations non triviales.

Le chapitre suivant est consacré précisément à construire des plans projectifs rigides (c'est-à-dire sans aucune collinéation non triviale) ou dont le groupe des collinéations est d'une catégorie donnée.

CHAPITRE II

PLANS DE HILBERT

Le premier exemple de plan affine (respectivement projectif) non arguésien, est dû à Hilbert ([Hi]). Par une légère modification de sa construction, nous obtenons, pour tout groupe discret de similitudes de $\mathbb{R}^2$, un plan projectif ayant ce groupe comme groupe (total) de collinéations. Nous construisons aussi une famille non dénombrable de plans rigides (c'est-à-dire dont le groupe des collinéations est réduit à l'identité , non isomorphes deux à deux.

§1 - CONSTRUCTION DES PLANS DE HILBERT.

N.B. Dans tout ce chapitre, les ellipses $\mathcal{E}$ que l'on rencontrera, seront supposées convexes, fermées et non réduites à des disques. Leur frontière sera notée $\partial\mathcal{E}$.

Lemme 1.

Soit I un point de $\mathbb{R}^2$ pris en dehors des cercles de courbure aux extrémités du petit axe d'une ellipse $\mathcal{E}$. Il n'existe alors aucun cercle passant par I et coupant $\partial\mathcal{E}$ en quatre points (distincts ou confondus).

Démonstration : Soit γ un cercle de centre 0 , coupant $\partial\mathcal{E}$ en quatre points distincts. Par une homothétie de centre 0 et de rapport convenable > 1 , on peut transformer γ en un cercle γ' tangent à $\partial\mathcal{E}$ en un certain point T . Si γ' n'est pas bitangent à $\partial\mathcal{E}$, il existe une homothétie

de centre T et de rapport convenable > 1 , transformant γ' en un cercle γ'' bitangent extérieurement à $\partial\mathcal{E}$ et contenant γ . Or tout cercle bitangent extérieurement possède un rayon inférieur au rayon de courbure, r, en les sommets du petit axe, et son centre 0 est compris entre les deux centres 0_1 et 0_2 des cercles de courbure en les extrémités de ce petit axe. Donc tout point M , intérieur au cercle bitangent γ'' à $\partial\mathcal{E}$ vérifiera : 0_1M ou $0_2M < 0M < r$; et ainsi sera intérieur à l'union des deux grands cercles de courbure. Par passage à la limite, on obtient donc que tout cercle coupant $\partial\mathcal{E}$ en quatre points distincts ou confondus, est contenu dans l'union des grands cercles de courbure. Le lemme 1 est démontré. //

Notation. L'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$, extérieurs aux deux grands cercles de courbure d'une ellipse $\mathcal{E}$, sera noté $\mathcal{J}(\mathcal{E})$.

Lemme 2.

Soit γ un cercle coupant la frontière $\partial\mathcal{E}$ d'une ellipse $\mathcal{E}$ en deux points seulement, non multiples et distincts, A et B . Alors l'un des arcs de cercle $\overset{\frown}{AB}$ est intérieur à $\mathcal{E}$, et l'autre extérieur à $\mathcal{E}$.

Démonstration : Les points A et B n'étant pas multiples, les deux courbes γ et $\partial\mathcal{E}$ se traversent en ces points. Donc, l'un des arcs $\overset{\frown}{AB}$ a un point M intérieur à $\mathcal{E}$ et l'autre un point N extérieur à $\mathcal{E}$. L'arc ouvert $\overset{\frown}{AB}$ qui contient M , ne peut contenir un point extérieur à $\mathcal{E}$, car sinon, étant connexe, il couperait $\partial\mathcal{E}$ en un point nécessairement distinct de A et B , ce qui n'est pas. Cet arc est donc intérieur à $\mathcal{E}$. De même, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ qui contient N est extérieur à $\mathcal{E}$. Ceci démontre le lemme 2. //

Notations. Soient : $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ une famille d'ellipses de $\mathbb{R}^2$, deux à deux disjointes, et $\{I_i\}_{i\in I}$ une famille de points de $\mathbb{R}^2$, tels que pour tout $i \in I$, on ait : $I_i \in \mathcal{J}(\mathcal{E}_i)$. Si a est une droite du plan affine réel arguésien $A_2(\mathbb{R})$, coupant $\mathcal{E}_i$ en deux points distincts A et B , on notera a_i^* l'arc du cercle (qui peut être une droite) passant par les points A , B , I_i ,

intérieur à $\mathcal{E}_i$ (ceci a un sens d'après le lemme 2) et la partie de $\mathbb{R}^2$ coïncidant avec a en dehors des ellipses $\mathcal{E}_i$ et avec a^{*i} à l'intérieur des ellipses $\mathcal{E}_i$ coupées par a , sera notée $\tilde{a}$. Si a est une droite de $A_2(\mathbb{R})$ ne coupant aucune ellipse $\mathcal{E}_i$ en strictement plus d'un point, on posera : $\tilde{a} = a$.

Nous voulons démontrer que le système dont les points sont ceux de $\mathbb{R}^2$ et les droites les transformées $\tilde{a}$ des droites du plan affine $A_2(\mathbb{R})$, est un plan affine. Prouvons d'abord :

Lemme 3.

Soient a et b deux droites non parallèles du plan affine $A_2(\mathbb{R})$. Une condition nécessaire et suffisante pour que le point $a \cap b$ appartienne à une ellipse $\mathcal{E}_i$ et que l'on ait : $a^{*i} \cap b^{*i} \neq \phi$.

Démonstration : Soit $\{M\} = a \cap b \in \mathcal{E}_i$. Le lemme est évident si $M \in \partial\mathcal{E}_i$. Supposons donc M intérieur à $\mathcal{E}_i$. Notons B et B' les points d'intersection de la droite b avec $\partial\mathcal{E}_i$. La droite a traversant le segment BB' , chacun des deux arcs d'ellipse déterminés par B et B' , contient un point de $a \cap \partial\mathcal{E}_i$. Donc le connexe a^{*i} contient un point dans chacune des deux régions (connexes et complémentaires) de $\mathbb{R}^2$, déterminées par $\tilde{b}$, et ainsi coupe $\tilde{b}$ qui est leur frontière commune. Comme a^{*i} est contenu dans $\mathcal{E}_i$, on a : $a^{*i} \cap b^{*i} = a^{*i} \cap \tilde{b} \neq \phi$ ce qui montre que la condition du lemme 3 est bien nécessaire. La réciproque se démontre d'une manière tout à fait analogue. Le lemme 3 est ainsi démontré. //

Une conséquence immédiate est :

Lemme 4.

Soient a et b deux droites du plan affine $A_2(\mathbb{R})$. Une condition nécessaire et suffisante pour que celles-ci se coupent, est qu'il en soit de même des sous-ensembles $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$.

Théorème 1.

Le système $\pi = \pi(\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}, \{I_i\}_{i\in I})$, dont les points sont ceux de $\mathbb{R}^2$ et les droites les transformées $\tilde{a}$ des droites du plan affine réel arguésien $A_2(\mathbb{R})$, est un plan affine.

Démonstration : Vérifions que le système π satisfait aux axiomes des plans affines (Définition III, chapitre I).

1) Par un point A, non situé sur une droite $\tilde{a}$, il passe une et une seule parallèle à cette droite. En effet, soit ℓ une droite de $A_2(\mathbb{R})$, passant par le point A, et non parallèle à la droite a. Si m est une droite de $A_2(\mathbb{R})$ parallèle à a, alors $\tilde{m}$ coupe a et l'application : $m \cap \ell \to \tilde{m} \cap \ell$ est continue et prend des "valeurs" de part et d'autre du point A, donc prend la valeur A. Il existe ainsi une droite $\tilde{m}$ passant par A et telle que m ne coupe pas la droite a. Le lemme 4 nous montre que $\tilde{m}$ ne peut couper $\tilde{a}$ et donc $\tilde{m}$ est une parallèle à $\tilde{a}$ passant par A. Soit $\tilde{n}$ une autre parallèle à $\tilde{a}$ passant par A. $\tilde{m}$ coupant $\tilde{n}$, m coupe n. Donc $m = n$ et $\tilde{m} = \tilde{n}$. L'axiome 1) est vérifié.

2) Par deux points distincts A et B, il passe une et une seule droite de π. En effet : si les points A et B sont tous deux hors de toutes les ellipses $\mathcal{E}_i$ ou bien tous deux intérieurs à une même ellipse $\mathcal{E}_i$, ceci est immédiat. Supposons donc : $A \in \mathcal{E}_i$ et $B \notin \mathcal{E}_i$ (pour un certain indice i fixé). Si γ est un cercle passant par les points A et I_i, nous noterons encore $\tilde{\gamma}$ la transformée, par l'application $a \to \tilde{a}$ définie précédemment, de la droite du plan $A_2(\mathbb{R})$, passant par les points d'intersection du cercle γ avec $\partial\mathcal{E}_i$. Considérons maintenant une droite ℓ du plan projectif $P_2(\mathbb{R})$, passant par B et ne coupant pas l'ellipse $\mathcal{E}_i$. L'ensemble des cercles γ passant par les points A et I_i s'identifie à une variété connexe de $P_2(\mathbb{R})$. L'application $\gamma \mapsto \tilde{\gamma} \cap \ell$ est continue (car les coordonnées de $\tilde{\gamma} \cap \ell$ dépendent algébriquement des coefficients des cercles γ) et prend des "valeurs" de part et d'autre du point B (puisque continue et prenant la valeur "∞" d'après le 1)). Le point B est donc atteint : il existe une droite $\tilde{a}$ de π passant par les points A et B. Si $\tilde{b}$ est

une autre droite de π , passant par A et B , $\tilde{b}$ coupe la droite $\tilde{a}$ à l'intérieur et à l'extérieur de l'ellipse $\mathcal{E}_i$, donc d'après le lemme 3, il en est de même pour les droites a et b de $A_2(\mathbb{R})$. Par conséquent $a = b$ et ainsi $\tilde{a} = \tilde{b}$. L'axiome 2) est vérifié .

3) Il existe quatre points non alignés trois à trois. Si l'ensemble I des indices est vide, ceci est trivial, sinon il suffit de prendre quatre points intérieurs à une ellipse $\mathcal{E}_i$, dont trois quelconques d'entre eux ne sont pas cocycliques avec le point I_i .

Ceci achève la démonstration du théorème I. //

Remarque.

L'exemple initialement donné par Hilbert ([Hi]) est le plan $\pi(\mathcal{E},I)$ associé à l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $X^2 + 4Y^2 - 1 = 0$ et au point $I = (3/2,0)$.

§2 - COLLINEATIONS DES PLANS DE HILBERT.

Définition 1.

La complétion projective du plan affine $\pi(\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}, \{I_i\}_{i\in I})$ est appelée plan de Hilbert associé aux familles $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ et $\{I_i\}_{i\in I}$, et notée $\bar{\pi}(\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}, \{I_i\}_{i\in I})$.

N.B. Dans tout ce paragraphe, on supposera que l'ensemble Σ des points de $\mathbb{R}^2$ non adhérents à l'union des ellipses $\mathcal{E}_i$ est un connexe non vide auquel la droite à l'infini adhère.

Notations.

La complétion projective de la droite $\tilde{a}$ de $\pi(\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}, \{I_i\}_{i\in I})$ sera notée $\bar{a}$. A et B étant deux points du plan projectif $P_2(\mathbb{R})$, nous noterons AB la droite de $P_2(\mathbb{R})$ passant par A et B et [A,B] la droite de $\bar{\pi} = \bar{\pi}(\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}, \{I_i\}_{i\in I})$ passant par ces deux points (de sorte que si A et B

ne sont dans aucune des ellipses $\mathcal{E}_i$, on a : $[A,B] = \overline{AB}$) . Nous nous servirons du résultat suivant :

Lemme 5.

Soient $\mathcal{E}$ une ellipse (de $\mathbb{R}^2$) qui n'est pas un cercle, I un point de $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ et P un point intérieur à $\mathcal{E}$. Alors, il n'y a qu'un nombre fini de cercles passant par P et I , déterminant sur $\partial\mathcal{E}$ des cordes concourantes.

Démonstration : Si a est une droite de $A_2(\mathbb{R})$, passant par P , les points de rencontre de a avec $\partial\mathcal{E}$ sont en relation involutive. Donc, quand la droite a varie autour du point P , l'ensemble des cercles passant par I et les deux points de rencontre de a avec $\partial\mathcal{E}$, forme une variété algébrique de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, que l'on notera Ψ_P . D'autre part, soit Φ_P la variété algébrique irréductible de $P_2(\mathbb{R})$, correspondant aux cercles passant par les points P et I . Si Φ_P et Ψ_P ont une infinité d'éléments en commun, alors Φ_P est contenue dans Ψ_P et ainsi toutes les cordes déterminées sur $\partial\mathcal{E}$ par les éléments de Φ_P passent par P . En particulier P est sur l'axe radical MI du faisceau des cercles passant par les points P et I . Par conséquent, les quatre points déterminés sur $\partial\mathcal{E}$ par deux éléments quelconques de Φ_P sont cocycliques, c'est-à-dire déterminent toujours (sur $\mathcal{E}$) des cordes également inclinées sur les axes ; ce qui n'est pas le cas. Il y a donc contradiction et le lemme 5 est démontré. //

Lemme 6.

Toute collinéation de $\bar{\pi}(\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}, \{I_i\}_{i\in I})$, permute les ellipses $\mathcal{E}_i$ ainsi que leurs frontières $\partial\mathcal{E}_i$.

Démonstration : Soit φ une collinéation du plan projectif $\bar{\pi} = \bar{\pi}(\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}, \{I_i\}_{i\in I})$. Chaque droite de $\bar{\pi}$ étant localement homéomorphe à la droite réelle, φ est continue ([Sa], théorèmes 2.3 et 3.5). Soit P un point de $P_2(\mathbb{R})$ n'appartenant à aucune des ellipses $\mathcal{E}_j$ et tel que $\varphi(P)$ soit intérieur à une certaine ellipse $\mathcal{E}_i$. L'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{(\bigcup_{i\in I} \mathcal{E}_i)}$ étant un

connexe non vide auquel la droite à l'infini adhère, on voit facilement que l'on peut trouver deux ouverts $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de $P_2(\mathbb{R})$ ne rencontrant aucune ellipse et tels que l'on ait : $\varphi(v) \subset \mathcal{W}$. Considérons trois droites a_1 , a_2 , a_3 de $P_2(\mathbb{R})$, passant par le point P et coupant $\mathcal{W}$. Nous pouvons trouver deux triangles (A_1,A_2,A_3) , (B_1,B_2,B_3) dont les côtés correspondants se coupent dans $\mathcal{V}$ et dont les sommets A_i , B_i se trouvent sur $a_i \cap \mathcal{V}$. Comme les droites de $\bar{\pi}$ et de $P_2(\mathbb{R})$ coïncident à l'extérieur des ellipses $\mathcal{E}_j$, les six points A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 et B_3 forment une configuration de Desargues dans $\bar{\pi}$. Leur image par φ est encore une configuration de Desargues de $\bar{\pi}$. En particulier les triangles $(\varphi(A_1),\varphi(A_2),\varphi(A_3))$ et $(\varphi(B_1),\varphi(B_2),\varphi(B_3))$ sont en perspective dans $\bar{\pi}$ depuis la droite $[\varphi(A_1A_2 \cap B_1B_2), \varphi(A_2A_3 \cap B_2B_3)]$. Or ces points étant hors de toutes les ellipses, les deux triangles précédents sont aussi en perspective, dans $P_2(\mathbb{R})$, depuis la droite de $P_2(\mathbb{R})$ passant par les points $\varphi(A_iA_j \cap B_iB_j)$ $(i \neq j)$. La proposition V, chapitre I, nous montre alors que ces deux triangles sont en perspective, dans $P_2(\mathbb{R})$, depuis un certain point Q . Posons : $\varphi(\bar{a}_i) = \bar{b}_i$, $i = 1,2,3$. Les droites b_i (respectivement $\bar{b}_i$) sont concourantes dans $P_2(\mathbb{R})$ (respectivement dans $\bar{\pi}$) . Ceci ayant lieu pour une infinité de triplets (a_1,a_2,a_3) , nous sommes en contradiction avec le lemme 5. Donc, pour tout point P , pris hors de toutes les ellipses $\mathcal{E}_j$, $\varphi(P)$ n'est intérieur à aucune ellipse $\mathcal{E}_i$. En utilisant l'application φ^{-1} ceci nous prouve que l'application φ envoie tout point intérieur à une ellipse $\mathcal{E}_i$ en un point d'une autre ellipse $\mathcal{E}_j$. Les ellipses étant connexes et φ continue, l'image par φ d'une ellipse quelconque est contenue dans une autre ellipse. Enfin, φ étant une permutation de $P_2(\mathbb{R})$ laissant invariant le complémentaire des intérieurs des ellipses $\mathcal{E}_i$, φ permute bien ces ellipses ainsi que leurs frontières. Ceci achève la démonstration du lemme 6. //

Théorème 2.

Pour qu'une permutation des points d'un plan projectif $\bar{\pi}(\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}, \{I_i\}_{i\in I})$ soit une collinéation de ce plan, il faut et il suffit que ce soit une similitude de $\mathbb{R}^2$ permutant les couples $(\mathcal{E}_i,I_i)$.

Démonstration : La condition est évidemment suffisante, car une similitude de $\mathbb{R}^2$ est une bijection qui transforme les cercles en cercles et les droites en droites.

Réciproquement, montrons que :

1) φ est une collinéation de $P_2(\mathbb{R})$. En effet : a étant une droite du plan projectif $\bar{\pi}$, nous noterons $\underline{a}$ la droite du plan projectif $P_2(\mathbb{R})$ dont elle est l'image (c'est-à-dire telle que $\overline{(\underline{a})} = a$). La permutation φ des points de $P_2(\mathbb{R})$ définit une permutation des droites de $P_2(\mathbb{R})$ par : $\varphi(a) = \underline{\varphi(\bar{a})}$. Montrons que cette permutation transforme trois droites concourantes de $P_2(\mathbb{R})$ en trois droites concourantes. Pour cela considérons trois droites a_1 , a_2 , a_3 de $P_2(\mathbb{R})$, non à l'infini, passant par un point P . On peut trouver deux triangles (A_1,A_2,A_3) , (B_1,B_2,B_3) , portés par les droites a_i , i = 1,2,3 (c'est-à-dire tels que : A_i et B_i appartiennent à la droite a_i) , en perspective depuis la droite à l'infini et extérieurs à toutes les ellipses $\mathcal{E}_i$. Ces triangles ont leurs côtés, dans $\bar{\pi}$, qui se coupent eux aussi en trois points alignés hors des $\mathcal{E}_i$. L'application φ laissant invariant le complémentaire de l'union des ellipses $\mathcal{E}_i$, les images par φ de ces deux triangles, ont leurs côtés correspondants (dans $\bar{\pi}$) qui se coupent en dehors des $\mathcal{E}_i$. Donc, il en est de même pour leurs côtés dans $P_2(\mathbb{R})$. Les triangles $(\varphi(A_1),\varphi(A_2),\varphi(A_3))$ et $(\varphi(B_1),\varphi(B_2),\varphi(B_3))$ sont ainsi en perspective, dans $P_2(\mathbb{R})$, depuis une certaine droite et par conséquent ($P_2(\mathbb{R})$ est arguésien) depuis un certain point : les droites $\varphi(\bar{a}_i)$ sont concourantes. Par continuité ce résultat est vrai quels que soient les droites a_1 , a_2 , a_3 de $P_2(\mathbb{R})$. φ est bien une collinéation du plan projectif $P_2(\mathbb{R})$.

2) φ laisse invariante la droite à l'infini. En effet : soit $\mathcal{E}_i$ une des ellipses entrant dans la définition du plan $\bar{\pi}$. D'après le lemme 6, $\varphi(\mathcal{E}_i) = \mathcal{E}_j$ pour un indice j convenable. Montrons que l'on a aussi : $\varphi(I_i) = I_j$. Pour cela, considérons une droite ℓ du plan $P_2(\mathbb{R})$, passant par le point I_i et coupant l'ellipse $\mathcal{E}_i$ en au moins deux points distincts. Sa trace sur $\mathcal{E}_i$ est aussi la trace d'une droite de $\bar{\pi}$; il en sera donc de même pour son image par φ (d'après 1)). Or ceci ne peut avoir lieu que si

$\varphi(\ell)$ passe par I_j . Le même raisonnement fait à partir d'une autre droite m , distincte de ℓ , montre que : $\varphi(I_i) = \varphi(\ell \cap m) = \varphi(\ell) \cap \varphi(m) = I_j$. Ceci va nous montrer que la permutation φ transforme deux cordes (dans $P_2(\mathbb{R})$) de $\mathcal{E}_i$, également inclinées sur les axes, en 2 cordes de $\mathcal{E}_j = \varphi(\mathcal{E}_i)$ ayant la même propriété. En effet, soient a et b les deux droites de $P_2(\mathbb{R})$ portant ces deux cordes. On peut supposer que le point $P = a \cap b$ est dans $\mathcal{E}_i$. Les points $a^{*i} \cap b^{*i}$, $a \cap b$ et I_i sont alignés dans $P_2(\mathbb{R})$, il en est donc de même pour leurs images $\varphi(a^{*i}) \cap \varphi(b^{*i})$, $\varphi(a) \cap \varphi(b)$ et I_j . Ceci indique que les cordes $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont également inclinées sur les axes de l'ellipse $\mathcal{E}_j$. Ainsi φ transporte les deux points à l'infini sur les axes de $\mathcal{E}_i$, en les deux points à l'infini sur les axes de $\mathcal{E}_j$, et laisse donc bien invariante la droite à l'infini.

3) φ est une similitude. En effet, φ étant une collinéation de $\bar{\pi}$, transforme les arcs de cercles correspondant aux parties des droites de $\bar{\pi}$ contenues dans les ellipses $\mathcal{E}_i$, en des arcs de cercles ; mais, étant aussi une collinéation de $P_2(\mathbb{R})$ transforme une conique en une conique. Il s'en suit donc que tout cercle coupant une ellipse $\mathcal{E}_i$ (en au moins cinq points) est transformé en un cercle. Soit γ un tel cercle et soient A,B,C,D les sommets des diamètres de γ parallèles aux axes de $\mathcal{E}_i$. Considérons les tangentes à γ , a,b,c,d, menées par A,B,C et D respectivement. D'après 2), les droites $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$, $\varphi(d)$ sont respectivement parallèles aux deux axes de $\varphi(\mathcal{E}_i)$. Or ce sont aussi des tangentes à $\varphi(\gamma)$. Donc les quatre points $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$ sont les sommets de deux diamètres orthogonaux de $\varphi(\gamma)$. On en déduit immédiatement que φ est une similitude (de $\mathbb{R}^2$) . D'après le lemme 6, φ permute les ellipses $\mathcal{E}_i$; on a montré au 2) que φ permute aussi les points I_i . Le théorème 2 est démontré. //

Corollaire.

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de $\mathbb{R}^2$ et I un point de $\mathcal{J}(\mathcal{E})$. Une condition nécessaire et suffisante pour que le plan projectif $\bar{\pi}(\mathcal{E},I)$ ait une collinéation non triviale, est que le point I soit situé sur l'un des axes de l'ellipse $\mathcal{E}$. Dans ce cas il n'existe qu'une seule collinéation non triviale, qui est la symétrie par rapport à cet axe.

Ceci est immédiat. //

§3 - PLANS PROJECTIFS AYANT UN GROUPE DE COLLINEATIONS DONNE .

Définition 2.

Un groupe G de transformations de $\mathbb{R}^2$ sera dit discret s'il existe un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ tel que 1°) pour tout élément φ de G, distinct de l'identité, on ait : $\varphi(D) \cap D = \phi$. 2°) $\bigcup_{\varphi \in G} \overline{\varphi(D)}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Dans ce paragraphe, nous montrons que pour tout groupe discret de similitudes de $\mathbb{R}^2$, il existe un plan projectif ayant ce groupe comme groupe (total) de collinéations.

Il pourra être commode de poser :

Définition 3.

Un groupe G de similitudes de $\mathbb{R}^2$ sera dit admissible s'il existe une ellipse $\mathcal{E}$ et un point $I \in \mathcal{J}(\mathcal{E})$ tels que, pour tous éléments φ et ψ de G, on ait : $\varphi(\mathcal{E}) \cap \psi(\mathcal{E}) = \phi$ ou bien $\varphi(\mathcal{E}) = \psi(\mathcal{E})$ et $\varphi(I) = \psi(I)$.

Si le groupe G est admissible, pour tout élément φ de G, le point $\varphi(I)$ est dans $\mathcal{J}(\varphi(\mathcal{E}))$. Ceci nous permet donc de considérer le plan projectif $\bar{\pi}(\varphi(\varepsilon)\}_{\varphi \in G}$, $\{\varphi(I)\}_{\varphi \in G})$ que l'on notera $\bar{\pi}(G, \mathcal{E}, I)$

Lemme 7.

Tout groupe discret de similitudes est admissible.

Démonstration : Soit G un groupe discret de similitudes de $\mathbb{R}^2$. Par définition, il existe un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout élément φ de G distinct de l'identité, on ait : $\varphi(D) \cap D = \phi$. On peut trouver une ellipse $\mathcal{E}$ contenue dans D telle que D contienne un point I de $\mathcal{J}(\mathcal{E})$. D n'étant invariant par aucun élément de G autre que l'identité, on a

bien, pour tous φ , $\psi \in G$ $(\varphi \neq \psi)$: $\varphi(\mathcal{E}) \cap \psi(\mathcal{E}) = \phi$. Le groupe G est bien admissible. //

Théorème 3.

Pour tout groupe G discret de similitudes (de $\mathbb{R}^2$) , il existe un plan projectif dont le groupe (total) des collinéations est G .

Démonstration : Soit G un groupe discret de similitudes et D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que pour tout élément φ de G distinct de l'identité, on ait $\varphi(D) \cap D = \phi$. Choisissons dans l'ouvert D , une ellipse $\mathcal{E}$ et un point $I \in \mathcal{J}(\mathcal{E})$, non situé sur un des axes de $\mathcal{E}$. Tout élément de G est manifestement une collinéation du plan $\bar{\pi}(G,\mathcal{E},I)$. Réciproquement soit α une collinéation de $\bar{\pi}(G,\mathcal{E},I)$. L'ensemble $\Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus (\bigcup_{\varphi \in G} \varphi(\mathcal{E}))$ est connexe et tout point à l'infini adhère à Σ . Nous pouvons alors appliquer le théorème 2 : la collinéation α est nécessairement une similitude de $\mathbb{R}^2$. Notons A et B les extrémités du grand axe de $\mathcal{E}$. Le triangle (A,B,I) est transformé par α en le triangle $(\alpha(A),\alpha(B),\alpha(I))$ qui est de la forme $(\varphi(A),\varphi(B),\varphi(I))$ pour un élément convenable φ de G . α et φ gardent le rapport des distances. Or, par construction, I a été pris non équidistant des points A et B . Donc : $\alpha(A) = \varphi(A)$, $\alpha(B) = \varphi(B)$, $\alpha(I) = \varphi(I)$. Ainsi les similitudes α et φ coïncident en trois points non alignés : elles sont donc identiques. Par conséquent la collinéation α de $\bar{\pi}(G,\mathcal{E},I)$ appartient à G . Le théorème 3 est démontré. //

Les groupes dihédraux et cycliques étant des groupes discrets de similitudes, nous avons en particulier :

Corollaire.

Pour tout groupe dihédral (respectivement cyclique), il existe un plan projectif ayant ce groupe comme groupe (total) de collinéations.

Remarques.

1) Tous les plans projectifs $\pi(G,\mathcal{E},I)$ construits ci-dessus sont dans la classe I_1 de Lenz-Barlotti et bien qu'ayant pas (ou peu) de collinéation(s)

possèdent cependant beaucoup de configurations de Desargues.

2) Le corollaire nous montre que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un plan projectif dont le groupe des collinéations est d'ordre n .

§4 - ISOMORPHISMES DES PLANS DE HILBERT.

Nous nous restreignons aux plans $\bar{\pi}(\mathcal{E},I)$, pour une ellipse $\mathcal{E}$ fixée, le point I variant dans $\mathcal{J}(\mathcal{E})$.

Théorème 4.

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de $\mathbb{R}^2$, I_1 et I_2 deux points de $\mathcal{J}(\mathcal{E})$. Une condition nécessaire et suffisante pour que les plans projectifs $\bar{\pi}(\mathcal{E},I_1)$ et $\bar{\pi}(\mathcal{E},I_2)$ soient isomorphes, est que les points I_1 et I_2 soient symétriques par rapport à l'un des axes de $\mathcal{E}$, ou bien par rapport au centre de $\mathcal{E}$. Dans ce cas, il existe un seul isomorphisme de $\bar{\pi}(\mathcal{E},I_1)$ sur $\bar{\pi}(\mathcal{E},I_2)$, qui est la symétrie par rapport à l'axe ou le point en question.

Démonstration : Celle-ci est tout à fait analogue à la démonstration du théorème 2. La différence vient du fait que l'on ne sait pas à priori si un isomorphisme de $\pi_1 = \bar{\pi}(\mathcal{E},I_1)$ sur $\pi_2 = \bar{\pi}(\mathcal{E},I_2)$ est continu. Nous utiliserons les notations suivantes : si A et B sont deux points distincts de π_1 (ou π_2) , la droite de π_i passant par ces deux points sera notée $[A,B]_i$. Si a est une droite de $P_2(\mathbb{R})$, son image dans π_i (par la transformation définie au paragraphe 1) sera notée $\bar{a}^i$. Enfin, si b est une droite de π_i , la droite de $P_2(\mathbb{R})$ dont elle est l'image, sera notée $\underline{b}_i$, $(i = 1,2)$.

La condition du théorème 4 est évidemment suffisante. Réciproquement, soit φ un isomorphisme de π_1 sur π_2 . Montrons d'abord :

Lemme.

Pour tout point $P \notin \mathcal{E}$, le point $\varphi(P)$ n'est pas intérieur à $\mathcal{E}$.

En effet, soient a_1 , a_2 , a_3 et ℓ quatre droites de $P_2(\mathbb{R})$ ne coupant pas $\mathcal{E}$ et passant par P . Posons pour $i = 1,2$: $\varphi(a_i) = \bar{b}_i^{-2}$, $\varphi(\ell) = \bar{m}^{-2}$. On peut trouver neuf points B_1 , B_2 , B_3 , B'_1 , B'_2 , B'_3 , V_1 , V_2 , V_3 tels que : 1°) B_i , $B'_i \in b_i \cap (P_2(\mathbb{R})\backslash\mathcal{E})$, $i = 1,2,3$; 2°) $V_i \in m \cap (P_2(\mathbb{R})\backslash\mathcal{E})$, $i = 1,2,3$; 3°) $B_1B_3 \cap m = V_2 = B'_1B'_3 \cap m$, $B_1B_2 \cap m = V_3$, $B_2B_3 \cap m = V_1 = B'_2B'_3 \cap m$. Nous avons alors : $V_1 \in [B_2,B_3]_2 \cap [B'_2,B'_3]_2$, $V_2 \in [B_1,B_3]_2 \cap [B'_1,B'_3]_2$, $V_3 \in [B_1,B_2]_2$. Considérons maintenant les points : $A_i = \varphi^{-1}(B_i)$, $A'_i = \varphi^{-1}(B'_i)$, $U_i = \varphi^{-1}(V_i)$, $i = 1,2,3$. Les deux triangles (A_1,A_2,A_3) et (A'_1,A'_2,A'_3) sont en perspective, dans $P_2(\mathbb{R})$, depuis le point P et donc aussi en perspective depuis une certaine droite qui est nécessairement la droite $\ell = U_1U_2$. D'où l'on en déduit que : $U_3 = A_1A_2 \cap B_1B_2 = [A_1,A_2]_1 \cap [A'_1,A'_2]_1$. Donc : $V_3 = [B_1,B_2]_2 \cap [B'_1,B'_2]_2 = B_1B_2 \cap B'_1B'_2$. Les deux triangles (B_1,B_2,B_3) et (B'_1,B'_2,B'_3) sont ainsi en perspective, dans $P_2(\mathbb{R})$, depuis la droite m et par conséquent sont aussi en perspective depuis un certain point Q : les droites b_1 , b_2 , b_3 sont concourantes (nécessairement à l'intérieur de $\mathcal{E}$). Ceci ayant lieu pour une infinité de triplets (b_1,b_2,b_3) , le point $\varphi(P)$ ne peut être intérieur à l'ellipse $\mathcal{E}$ (d'après le lemme 5). Ceci démontre le lemme.

Par un raisonnement identique à celui du théorème 2, le lemme ci-dessus nous permet de montrer que tout isomorphisme de π_1 sur π_2 est une similitude de $\mathbb{R}^2$. Sachant ceci, considérons les extrémités A,B du petit axe de l'ellipse $\mathcal{E}$, et celles C,D de son grand axe. φ permute les points A et B ainsi que les points C et D . De plus, φ conservant la droite à l'infini et la conjugaison par rapport à $\mathcal{E}$, φ laisse invariant le centre 0 de $\mathcal{E}$. Quatre cas alors se présentent : 1°) $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = B$, $\varphi(C) = D$, $\varphi(D) = C$: φ est la symétrie par rapport à l'axe AB . 2°) $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) = A$, $\varphi(C) = C$, $\varphi(D) = D$: φ est la symétrie par rapport à l'axe CD . 3°) $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) = A$, $\varphi(C) = D$, $\varphi(D) = C$: φ est la symétrie par rapport au point 0 . 4°) φ est l'identité. Ceci achève la démonstration du théorème 4. //

Corollaire.

Il existe une infinité non dénombrable de plans projectifs, non isomorphes deux à deux, dont les groupes (totaux) de collinéations sont réduits à l'identité.

Démonstration : Considérons la famille des plans projectifs $\bar{\pi}(\mathcal{E},I)$, où $\mathcal{E}$ est une ellipse fixe de $\mathbb{R}^2$, et I décrit la partie de $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ contenue dans un des quadrants de $\mathbb{R}^2$, déterminés par les axes de $\mathcal{E}$ (I non situé sur un axe de $\mathcal{E}$) . D'après le théorème 4 ces plans sont non isomorphes deux à deux et d'après le corollaire du théorème 2, leur groupe de collinéations est trivial. Le corollaire est démontré. //

CHAPITRE III

SYSTEMES DE VEBLEN-WEDDERBURN QUADRATIQUES

Soit π un plan de translation ; il est coordonné (d'après le théorème III, chapitre 1) par un système de Veblen-Wedderburn à droite, et celui-ci est un espace vectoriel sur son noyau (voir définition 1 ci-dessous). Dans ce chapitre, nous étudions les systèmes de Veblen-Wedderburn à droite, "quadratiques", c'est-à-dire de dimension deux sur un sous-corps de leur noyau.

Après avoir donné une caractérisation de ces sytèmes quadratiques K (à l'aide d'une certaine permutation de K : théorème 1), nous utilisons ce résultat pour construire de nouveaux systèmes de Veblen-Wedderburn à droite (finis et infinis). Nous obtenons en particulier (théorème 2) une généralisation de certains systèmes de Hall ([Ha] p. 364).

§1 - RAPPELS.

Ce paragraphe est consacré à quelques rappels.

Un système V.W à droite a été défini (chapitre 1, définition 18) comme un ternaire géométrique linéaire $(K,+,.)$ tel que : 1°) $(K,+)$ est un groupe, 2°) $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$, $\forall x,y,z \in K$. On peut montrer en fait que nécessairement $(K,+)$ est un groupe commutatif [Ha] p. 362).

Dans le cas des systèmes V.W, les conditions géométriques des ternaires se simplifient et l'on a ([Ha] p. 362) :

Proposition I.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble K muni de deux lois de composition internes "+" et "·" , soit un système V.W à droite est que :

1°) $(K,+)$ soit un groupe (commutatif)

2°) $(K\setminus\{0\},\cdot)$ soit une boucle (0 étant l'élément neutre du groupe $(K,+)$

3°) $(x+y)\cdot a = x\cdot a + y\cdot a$, $\forall x,y,a \in K$.

4°) L'équation : $x\cdot a - x\cdot b = c$, ait une solution en x , quels que soient a et b fixés, distincts, dans K .

5°) $x.0 = 0.x = 0$, $\forall x \in K$.

De plus, dans le cas fini, la condition 4°) est superflue.

Les différents corps que l'on va définir maintenant nous seront d'une grande utilité dans l'étude des systèmes V.W.

Définition 1.

Etant donné un système V.W à droite $(K,+,\cdot)$, on définit le noyau à droite N_d , le noyau médian N_m , le noyau N , le centre F , de K , respectivement par :

$$N_d = \{a\in K : (x\cdot y)\cdot a = x\cdot(y\cdot a) \quad , \quad \forall x,y \in K\} .$$

$$N_m = \{a\in K : (x\cdot a)\cdot y = x\cdot(a\cdot y) \quad , \quad \forall x,y \in K\} .$$

$$N = \{a\in K : a.(x.y) = (a.x).y \text{ et } a.(x+y) = a.x + a.y \ , \ \forall x,y \in K\}$$

$$F = \{a\in N : a.x = x.a \ , \ \forall x \in K\} .$$

Si $(K,+,.)$ est un semi-corps le noyau est plutôt appelé noyau à gauche. On voit facilement que le noyau à croite N_d est un nearfield, le noyau N est un corps (gauche), dont le centre F est un sous-corps commutatif.

Nous aurons aussi à considérer :

Définition 2.

Un nodule d'un système V.W. à droite $(K,+,.)$, est un sous-système $(k,+,.)$ tel que : 1°) $(k,+,.)$ est un corps (gauche) ; 2°) $x.(\alpha+\beta) = x.\alpha+x.\beta$ $\forall x \in K$, $\forall \alpha,\beta \in k$; 3°) $(x.y).z = x.(y.z)$ dès que deux des éléments x,y,z sont dans k .

Il est alors immédiat qu'un système V.W à droite est un espace vectoriel à gauche sur son noyau et son centre, et un espace vectoriel à droite sur tout nodule. Un système V.W à droite de dimension 2 sur un sous-corps de son noyau sera dit quadratique.

On montre ([F] p. 136) :

Proposition II.

Si deux systèmes V.W à droite sont isotopes, alors leurs centres, noyaux, noyaux à droite et médian, sont isomorphes.

En général, deux systèmes V.W non isotopes peuvent coordonner des plans isomorphes. Par contre, dans le cas particulier des semi-corps nous avons ([K] p. 193) :

Proposition III.

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux semi-corps coordonnent des plans projectifs isomorphes, est qu'ils soient isotopes.

Nous allons maintenant décrire une famille de systèmes V.W à droite due à M. Hall. Les plans construits sur ces systèmes forment une des classes les plus étudiées de plans projectifs non arguésiens.

Définition 3.

Soit $F,+,.$ un corps commutatif et $f(X) = X^2 - rX - s$ un polynôme irréductible sur F . On appelle système de Hall relatif au corps F et au polynôme f , le système $(F\times F,+,0)$ dont l'addition, "+" , est celle de l'espace vectoriel sur F , $F\times F$, et dont la multiplication, "$\circ$ ", est donnée par :

$$(x,y)\circ(u,0) = (x.u, y.u) \qquad x,y,u \in F$$

$$(x,y)\circ(u,v) = (x.u - y.v^{-1}.f(u), x.v - y.u + y.r) \qquad x,y,u,v \in F\ ,\ v \neq 0$$

On peut identifier le corps F au sous-système $Fx\{0\}$ et l'on a :

Proposition IV.

Soit $K = (K,+,\circ)$ le système de Hall relatif au corps F et au polynôme $x^2 - rx - s$. Alors :

i) F est le centre de K et K est un espace vectoriel de dimension 2 sur F .

ii) Tout élément x de $K\backslash F$ est racine de l'équation $x\circ x - r\circ x - s = 0$.

iii) K possède un groupe d'automorphismes laissant le centre F fixe élément par élément, et transitif sur les éléments de $K\backslash F$.

Les propriétés i) et ii) sont démontrées dans : [Ha], théorème 20.4.3.

La propriété iii) est démontrée dans [0-M] théorème 6.

De plus ([Pa]) :

Proposition V.

Tous les systèmes finis de Hall relatifs à un même corps, coordonnent des plans isomorphes.

Les systèmes de Hall rentrent ainsi dans la classe des systèmes V.W. quadratiques . Ce chapitre est axé sur la construction de systèmes V.W. quadratiques vérifiant une condition un peu plus générale que la condition ii) de la proposition IV (Nous construirons au chapitre IV et V des systèmes V.W quadratiques satisfaisant cette fois-ci à la condition iii) de cette même proposition).

§2 - SYSTEMES V.W QUADRATIQUES.

Nous caractérisons les systèmes V.W à droite de dimension 2 sur un sous-corps de leur noyau de la manière suivante :

Théorème 1.

Soit F un corps (gauche), $V = F \oplus F.t$ un espace vectoriel à gauche de dimension 2 sur F et f une permutation de V telle que :

1°) Les éléments $f(x) - f(y)$ et $x-y$ de V sont linéairement indépendants dès que x est distinct de y .

2°) L'équation : $f(x) = \alpha x + b$ a une solution en $x \in V$, quels que soient $\alpha \in F$ et $b \in V$.

3°) $f(1) = t$; $f(0) = 0$.

Alors l'espace vectoriel V muni du produit :

$$(\alpha+\beta t)\circ x = \alpha x + \beta f(x) \quad , \quad \alpha,\beta \in F \quad , \quad x \in V .$$

est un système V.W à droite dont le noyau contient F .

Réciproquement, tout système V.W à droite de dimension 2 sur un sous-corps de son noyau peut être obtenu de cette manière.

Démonstration : Soit f une permutation de l'espace vectoriel à gauche $V = F \oplus F.t$ de dimension 2 sur le corps F , vérifiant les conditions 1°),2°) et 3°) du théorème 1. Considérons le produit "$\circ$" , défini sur V par : $(\alpha+\beta t)\circ x = \alpha x + \beta f(x)$, $\alpha,\beta \in F$, $x \in V$. Montrons que le système $(V,+,\circ)$ vérifie les conditions 1°) , 2°) , 3°) , 4°) et 5°) de la proposition I de ce chapitre. Les conditions 1°) , 3°) et 5°) sont trivialement vérifiées. Examinons la condition 2°) : il nous faut montrer que $V\setminus\{0\}$ muni du produit "$\circ$" est une boucle. C'est-à-dire que les applications $x \mapsto a\circ x$ et $x \mapsto x\circ a$ de V dans lui-même sont bijectives pour tout $a \in V$, $a \neq 0$. Soit donc $a \neq 0$. Les éléments a et $f(a)$ forment une base de l'espace vectoriel V sur F . Ainsi l'équation $\alpha a + \beta f(a) = b$ possède toujours une et une seule solution en $\alpha,\beta \in F$: l'application $x \to x\circ a$ est donc bijective. D'autre part, l'équation en x : $(\alpha+\beta t)\circ x = b$, $\alpha+\beta t \neq 0$, s'écrit : $\alpha x + \beta f(x) = b$. Si $\beta = 0$, alors α n'est pas nul et $x = \alpha^{-1}b$ est solution unique. Si $\beta \neq 0$, alors cette équation est équivalente à l'équation (en x) : $\beta^{-1}\alpha x + f(x) = \beta^{-1}b$, qui a toujours une solution par hypothèse. Cette solution est unique d'après la condition 1°) du théorème 1, vérifiée par

hypothèse par f . Comme de plus on a : $1\circ x = x\circ 1 = x$ pour tout x dans V , nous avons bien montré que le système $(V\setminus\{\circ\},\circ)$ est une boucle. Prouvons maintenant que l'équation $x\circ a - x\circ b = c$ possède une solution en x , dès que a est distinct de b . Cette équation s'écrit : $\alpha(a-b) + \beta(f(a)-f(b)) = c$, équation qui a toujours une solution d'après la condition 1°) du théorème 1. Le système $(V,+,\circ)$ est donc bien un système V.W à droite. Il est immédiat que son noyau contient le corps F .

Réciproquement, considérons un système V.W à droite $(V,+,\circ)$ espace vectoriel à gauche de dimension deux sur un sous-corps F de son noyau. Soit t un élément de V non dans F . Tout élément y de V s'écrit de manière unique : $y = \alpha + \beta\circ t$, $\alpha,\beta \in F$. L'utilisation de la distributivité à droite dans V et de l'associativité à gauche des éléments du noyau, nous donne :

$$(\alpha+\beta\circ t)\circ x = \alpha\circ x + \beta\circ(t\circ x)$$

c'est-à-dire, en posant : $t\circ x = f(x)$:

$$(\alpha+\beta\circ t)\circ x = \alpha\circ x + \beta\circ f(x) \ .$$

Nous obtenons donc la forme du produit annoncé au théorème 1. Le fait que l'application f ainsi définie, possède les propriétés 1°), 2°) et 3°) du théorème 1, provient directement de ce que d'une part, les applications $x \mapsto a\circ x$ sont bijectives si $a \neq 0$, et d'autre part, l'unité 1 de la boucle multiplicative, appartient toujours au noyau. Ceci démontre le théorème 1. //

Remarque.

1) Dans le cas fini, la condition 2°) du théorème 1 est superflue (D'après la proposition I).

2) Le noyau étant un corps, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit identique à F (dans les notations du théorème 1) est que le système V.W $(V,+,\circ)$ ne soit pas un corps.

On a trivialement le résultat suivant :

Proposition 1.

Pour qu'un système V.W. à droite quadratique, construit à partir de l'espace vectoriel V à l'aide d'une permutation f de cet espace, soit distributif à gauche (et donc soit un semi-corps) il faut et il suffit que f soit additive (c'est-à-dire vérifie : $f(x+y) = f(x) + f(y)$, quels que soient x et y dans V).

Nous allons maintenant donner quelques exemples de systèmes V.W quadratiques construits selon le procédé décrit au théorème 1. Les premiers exemples sont donnés par la proposition 2 ci-dessous. Nous poserons d'abord :

Définition 4.

Une application σ d'un corps F dans lui-même est dite décroissante, si le produit $(\sigma(x)-\sigma(y))(x-y)$ est toujours nul ou non carré dans F .

Proposition 2.

Soit F un corps commutatif contenant un élément non carré, et σ une permutation décroissante de F , telle que : 1°) $\sigma(0) = 0$, 2°) l'équation $\sigma(x) = \alpha x + b$ a une solution en $x \in F$, quels que soient $b \in F$ et α carré de F . Dans ces conditions, l'espace vectoriel de dimension 2 sur F : $V = F \oplus F.t$, muni du produit :

$$(\alpha+\beta t)\circ(\gamma+\delta t) = \alpha\gamma + \beta\sigma(\delta) + (\beta\gamma + \alpha\delta)t \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in F$$

est un système V.W à droite dont le centre contient F .

Démonstration : Le produit défini ci-dessus peut s'écrire : $(\alpha+\beta t)\circ x = \alpha x + \beta f(x)$, où f est l'application de V dans V définie par : $f(\gamma+\delta t) = \sigma(\delta) + \gamma t$. Montrons que cette application f vérifie les conditions 1°), 2°) et 3°) du théorème 1.

1°) La condition : $f(x) - f(y)$ et $x-y$ indépendants (pour $x \neq y$) , s'écrit, après avoir posé : $x = \alpha + \beta t$, $y = \gamma + \delta t$:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\gamma & \sigma(\beta)-\sigma(\delta) \\ \beta-\delta & \alpha-\gamma \end{vmatrix} \neq 0$$

c'est-à-dire : $(\alpha-\gamma)^2 \neq [\sigma(\beta)-\sigma(\delta)][\beta-\delta]$ dès que $(\alpha,\beta) \neq (\gamma,\delta)$; condition qui est bien vérifiée par hypothèse.

2°) L'équation : $f(x) = \alpha x + b$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} \sigma(\delta) = \alpha\gamma + u \\ \gamma = \alpha\delta + v \end{cases}$$

où l'on a posé $x = \gamma + \delta t$, $b = u + vt$; c'est-à-dire à :

$$\begin{cases} \sigma(\delta) = \alpha^2\delta + \alpha v + u \\ \gamma = \alpha\delta + v \end{cases}$$

système qui a bien une solution en (γ,δ) par hypothèse.

3°) Les conditions $f(1) = t$ et $f(0) = 0$ sont trivialement vérifiées. La proposition 2 est ainsi démontrée. //

Exemples.

a) Soient $F = \mathbb{R}$, σ une permutation décroissante de $\mathbb{R}$, nulle en 0 . Alors les conditions de la proposition 2 sont vérifiées et nous obtenons une famille de systèmes V.W à droite de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, distributifs à gauche seulement si σ est de la forme $x \mapsto sx$, $s < 0$ (dans ce cas on obtient un corps isomorphe au corps des complexes).

b) Soient $F = \mathbb{Q}$, r et s deux rationnels < 0 , σ la permutation de $\mathbb{Q}$ définie par : $\sigma(x) = sx$ si $x \geq 0$, $\sigma(x) = rx$ si $x \leq 0$. Les conditions de la proposition 2 sont encore vérifiées, et ceci nous procure une famille de systèmes V.W à droite de dimension 2 sur $\mathbb{Q}$, distributifs à gauche si et seulement si $r = s$ (Dans ce cas on obtient le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{s})$) .

c) Soient $F = GF(p^h)$, le corps fini à p^h éléments (p premier impair), s un élément non carré de $GF(p^h)$ et σ l'application : $GF(p^h) \ni \beta \mapsto \sigma(\beta) = s\beta^{p^k}$ $(0 \leq k < h)$. σ vérifie les conditions de la proposition 2 et l'espace vectoriel de dimension 2 sur $GF(p^h)$, $V = GF(p^h) + GF(p^h).t$

muni du produit :

$$(\alpha+\beta t)(\gamma+\delta t) = \alpha\gamma + s\beta\delta^{p^k} + (\beta\gamma+\alpha\delta)t$$

est un semi-corps quadratique sur $GF(p^h)$. Il n'est associatif (et donc isomorphe au corps $GF(p^{2h})$) que si $k = 0$.

Nous retrouvons ici certains semi-corps de Knuth ([Kn] p.213) dont nous reparlerons au chapitre V.

Le théorème suivant caractérise les systèmes V.W à droite, de dimension 2 sur leur centre F , F corps commutatif dont le groupe des carrés non nuls est d'indice 2 dans le groupe multiplicatif $F\setminus\{0\}$, et tels que tout élément $x = \alpha+\beta t$ non dans F (c'est-à-dire : $\beta \neq 0$) , ait un carré dans F , ne dépendant que de β . Nous obtiendrons ainsi une généralisation des systèmes de Hall construits sur un corps F vérifiant la condition ci-dessus, à l'aide d'un polynôme X^2-s , irréductible sur F .

Théorème 2.

Soit F un corps commutatif dont le groupe des carrés non nuls est d'indice 2 dans le groupe multiplicatif $F\setminus\{0\}$, et soit σ une permutation de F telle que : 1°) $\sigma(0) = 0$, 2°) σ est décroissante, 3°) l'équation $x^{1-\sigma} = xb + \gamma$ possède une solution non nulle en x quels que soient les éléments b et γ de F , $b \neq 0$ et γ carré. Alors, l'espace vectoriel de dimension 2 sur F , $V = F + Ft$, muni du produit :

$$\begin{cases} (\alpha+\beta t)\circ\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma t & \alpha,\beta,\gamma \in F \\ (\alpha+\beta t)\circ(\gamma+\delta t) = \alpha\gamma + \beta\delta^{-1}[\delta^{1-\sigma}-\gamma^2] + (\alpha\delta-\beta\gamma)t & , \ \alpha,\beta,\gamma,\delta \in F \ , \ \delta \neq 0 \end{cases}$$

est un système V.W à droite de dimension 2 sur son centre F , tel que pour tout élément non dans F , $x = \alpha+\beta t$, on ait $x\circ x = \beta^{1-\sigma} \in F$.

Réciproquement, tout système V.W à droite $(V,+,\circ)$, de dimension 2 sur son centre F , F corps commutatif dont le groupe des carrés non nuls est d'indice 2 dans le groupe multiplicatif $F\setminus\{0\}$, et tel que tout élément $x = \alpha+\beta t$ de V , non dans F , ait un carré ne dépendant que de β et appartenant à F , est obtenu de cette façon.

Démonstration : Soit donc F un corps commutatif dont le groupe des carrés non nuls est d'indice 2 dans le groupe multiplicatif $F\setminus\{0\}$. D'après le théorème 1 les systèmes V.W à droite quadratiques sur F sont les systèmes $(V,+,\circ)$, où V est l'espace vectoriel de dimension 2 sur F : $F + F.t$; l'addition "+" est celle de cet espace vectoriel et le produit "$\circ$" est donné par : $(\alpha+\beta t)\circ x = \alpha x + \beta f(x)$, f étant une permutation de V vérifiant les trois conditions du théorème 1. Posons : $f(x) = u(x) + v(x).t$ $(x\in V$, $u(x),v(x) \in F)$. Les conditions suivantes : i) F est contenu dans le centre de $(V,+,\circ)$; ii) $\beta \neq 0 \Rightarrow (\alpha+\beta t)^2 \in F$ ($(\alpha+\beta t)^2$ désignant l'élément $(\alpha+\beta t)\circ(\alpha+\beta t)$) ; iii) $f(1) = t$, $f(0) = 0$ se traduisent par : iv) : $u(\alpha) = 0$, $v(\alpha) = \alpha$ et $v(\alpha+\beta t) = -\alpha$ pour tous α,β dans F , $\beta \neq 0$. D'autre part, pour tout élément β non nul de F l'élément : $(\alpha+\beta t)^2 = \alpha^2 + u(\alpha+\beta t).\beta$ n'est pas nul et ne dépend par hypothèse que de β . Il peut alors se mettre sous la forme $\beta^{1-\sigma}$, où σ est une application de l'ensemble $F\setminus\{0\}$ dans lui-même. On a donc, pour tout élément β non nul de F : $u(\alpha+\beta t) = \beta^{-1}[\beta^{1-\sigma}-\alpha^2]$. Nous sommes donc ramenés, pour démontrer le théorème 2, à déterminer toutes les permutations $f(x) = u(x) + v(x)t$ de l'ensemble $V = F + F.t$ (où u et v sont des applications de V dans F vérifiant la condition iv) ci-dessus) satisfaisant aux conditions 1°) et 2°) du théorème 1. Examinons donc successivement ces deux conditions.

- Condition 1°) : Soient $x = \alpha+\beta t$ et $x' = \alpha'+\beta' t$ deux éléments distincts de $F+Ft$. Posons : $u(x) = u$, $v(x) = v$, $u(x') = u'$, $v(x') = v'$. La condition 1°) du théorème 1 est équivalente à :

(I) : $(\alpha-\alpha')(v-v') - (\beta-\beta')(u-u') \neq 0$ dès que l'on a : $(\alpha,\beta) \neq (\alpha',\beta')$.

Distinguons plusieurs cas :

a) $\beta = \beta' = 0$. On a alors : $\alpha \neq \alpha'$, $u = u' = 0$, $v = \alpha$, $v' = \alpha'$ et (I) est bien vérifiée.

b) $\beta \neq 0$, $\beta' = 0$. On a alors : $u' = 0$, $v' = \alpha'$, $v = -\alpha$, $u = \beta^{-1}[\beta^{1-\sigma}-\alpha^2]$.

La condition (I) devient : $-(\alpha^2-\alpha'^2) - \beta^{1-\sigma} + \alpha^2 \neq 0$, c'est-à-dire :

$\alpha'^2 \neq \beta^{1-\sigma}$ pour tous α' , β dans F , $\beta \neq 0$; ce qui est un cas particulier de la condition 2°) du théorème 2, une fois posé $\sigma(0) = 0$.

c) $\beta \neq 0$, $\beta' \neq 0$. On a alors : $u = \beta^{-1}(\beta^{1-\sigma}-\alpha^2)$, $u' = \beta'^{-1}(\beta'^{1-\sigma}-\alpha'^2)$, $v = -\alpha$, $v' = -\alpha'$. Dans ce cas, la condition (I) est équivalente à :

$$-(\alpha-\alpha')^2 - (\beta-\beta')[\beta^{-1}(\beta^{1-\sigma}-\alpha^2) - \beta'^{-1}(\beta'^{1-\sigma}-\alpha'^2)] \neq 0$$

c'est-à-dire :

$$2\alpha\alpha' - \alpha^2 - \alpha'^2 - \beta^{1-\sigma} - \beta'^{1-\sigma} + \beta\beta'^{\sigma} + \beta'\beta^{-\sigma} - \alpha'^2\beta\beta'^{-1} - \alpha^2\beta'\beta^{-1} \neq 0 ;$$

ou encore :

$$(2\alpha\alpha'\beta\beta' - \alpha'^2\beta^2 - \alpha^2\beta'^2)\beta^{-1}\beta'^{-1} + (\beta-\beta')(\beta'^{-\sigma}-\beta^{-\sigma}) \neq 0 ;$$

ou enfin :

$$(\alpha'\beta-\alpha\beta')^2\beta^{-1+\sigma}\beta'^{-1+\sigma} - (\beta-\beta')(\beta^{\sigma}-\beta'^{\sigma}) \neq 0 .$$

Or $\beta^{-1+\sigma}$ n'est pas un carré $(\beta\neq0)$, donc, le groupe des carrés non nuls de F étant d'indice 2 dans le groupe multiplicatif $F\setminus\{0\}$, $\beta^{-1+\beta}.\beta'^{-1+\sigma}$ est un carré. De plus, α et α' prennent des valeurs arbitraires et ainsi la condition 1°) du théorème 1 est équivalente à ce que l'application σ soit une permutation décroissante du corps F (satisfaisant : $\sigma(0) = 0$) .

- Condition 2°) : Posons $x = \lambda+\mu t$, $b = p+qt$ $(\lambda,\mu,p,q \in F)$. La condition 2°) du théorème 1 est équivalente à la résolution en (λ,μ) , du système :

$$(S) \qquad \begin{cases} u(\lambda+\mu t) = \alpha\lambda + p \\ v(\lambda+\mu t) = \alpha\mu + q \end{cases}$$

Si $\alpha q + p = 0$, alors $x = q$ est une solution de S . Supposons donc : $\alpha q + p \neq 0$. Les solutions de (S) ne peuvent pas appartenir à F . Le système (S) est donc équivalent au système

$$(S') \qquad \begin{cases} \mu^{-1}(\mu^{1-\sigma}-\lambda^2) = \alpha\lambda + p \\ -\lambda = \alpha\mu + q \end{cases}$$

c'est-à-dire finalement à la résolution de l'équation en μ :

$$\mu^{1-\sigma} = q^2 + \mu.(\alpha q+p) .$$

Ce qui est précisément la condition 3°) du théorème 2. Ceci achève la démonstration du théorème 2. //

Remarques :

i) D'après la remarque 1) du théorème 1, la condition 3°) du théorème 2 est superflue dans le cas fini.

ii) Les systèmes décrits au théorème précédent, ne sont jamais distributifs à gauche.

Exemples.

i) Si, dans les notations du théorème 2, l'on prend $\sigma(\beta) = s^{-1}\beta$, s non carré du corps F , on retrouve le système de Hall construit sur F à partir du polynôme X^2-s . (On vérifie immédiatement que les conditions affirmant que l'on obtient un système V.W quadratique sur F , sont vérifiées).

ii) Soit $F = GF(q)$ le corps fini à $q = p^h$ éléments, p nombre premier impair. Son groupe des carrés non nuls est d'indice 2 dans son groupe multiplicatif $F\setminus\{0\}$. D'autre part, d'après un résultat de Carlitz ([C]), les permutations décroissantes du corps $GF(p^h)$, $p \neq 2$, sont les applications $x \to sx^{p^r}+a$, s non carré de $GF(p^h)$, $a \in GF(p^h)$. Ainsi, le théorème 2 détermine explicitement tous les systèmes V.W à droite finis, quadratiques sur leur centre F , dont les éléments $\alpha+\beta t$ non dans F ont un carré appartenant à F et ne dépendant que de β . Ce sont les systèmes $(GF(q) + GF(q)t,+,\circ)$, dont l'addition est celle de l'espace vectoriel $GF(q) + GF(q)t$, et dont le produit est défini par :

$$\begin{cases} (\alpha+\beta t)\circ\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma t \quad , & \alpha,\beta,\gamma \in F \\ (\alpha+\beta t)\circ(\gamma+\delta t) = \alpha\gamma + \beta\delta^{-1}(s\delta^{1-p^r} - \gamma^2) + (\alpha\delta-\beta\gamma)t \quad , & \alpha,\beta,\gamma,\delta \in F,\ \delta\neq 0 \end{cases}$$

Si l'on fait $r = 0$, on obtient le système de Hall construit à partir du corps $F = GF(q)$ à l'aide du polynôme X^2-s . D'après la proposition V nous pouvons même affirmer que les plans projectifs coordonnés par les systèmes de Hall finis, construits sur un corps de caractéristique différente de 2, sont des cas particuliers des plans projectifs coordonnés par les systèmes V.W décrits à l'exemple n°2 précédent. Ces systèmes finis peuvent être obtenus d'une toute autre manière (voir [O.M]).

iii) Soient $F = \mathbb{R}$ le corps des réels et σ une permutation de $\mathbb{R}$ strictement décroissante, nulle en 0. Alors les conditions du théorème 2 sont vérifiées et nous construisons ainsi une grande variété de systèmes V.W à droite quadratiques sur $\mathbb{R}$ généralisant les systèmes de Hall réels (obtenus pour $\sigma : x \to s.x$, $s < 0$) .

CHAPITRE IV

DERIVATION

§1 - CAS FINI : DERIVATION D'OSTROM.

En 1961, Ostrom introduit la notion de plan dérivable pour un plan projectif fini d'ordre un carré. A partir de ce plan, il en construit un autre, appelé dérivé du premier, ayant même ensemble de points, mais non même ensemble de droites.

Albert ([A]) donne une description algébrique de la dérivation : il définit une classe de ternaires géométriques finis (dits "dérivables") coordonnant des plans projectifs dérivables et donne une loi permettant d'obtenir, à partir d'un ternaire dérivable K, un nouveau ternaire ∂K, appelé dérivé de K et coordonnant le dérivé du plan coordonné par K. Cette construction est un peu moins générale que celle d'Ostrom.

Nous avons essayé de généraliser au cas infini la notion de ternaire géométrique dérivable. Cependant, contrairement au cas fini, rien à priori, ne permet d'affirmer alors que les dérivés ∂K sont géométriques, c'est-à-dire coordonnent un plan projectif.

La remarque d'Albert, selon laquelle tout corps fini d'ordre carré est dérivable et a pour dérivé un système de Hall s'étend au cas infini. De plus le fait que tout système de Hall possède un groupe d'automorphismes laissant son centre fixe point par point et transitif sur les points non dans ce centre, nous conduit à étudier les semi-corps dérivables dont les dérivés possèdent un tel groupe d'automorphismes. Ceci nous définit une classe de semi-corps contenant ceux qui sont construits par le procédé de Cayley-

Dickson classique ; d'où le nom de semi-corps de Cayley-Dickson généralisés (une étude assez systématique de ces semi-corps et des plans qu'ils coordonnent sera entreprise au chapitre V).

Nous terminons ce chapitre IV par des caractérisations en termes de groupes d'automorphismes, des systèmes de Hall et aussi des systèmes V.W dérivables dérivant d'un semi-corps (respectivement d'un semi-corps de Cayley-Dickson généralisé).

§2 - EXTENSION AU CAS INFINI.

Nous étendons au cas infini la définition de ternaire dérivable de la manière suivante :

Définition 1.

Un ternaire géométrique (K,T) sera dit dérivable si :

I : $(K,+)$ est un groupe commutatif

II : (K,T) contient un sous-ternaire (F,T) tel que :

i) $T(x,\alpha,y) = x.\alpha + y$, $\forall x,y \in K$, $\forall \alpha \in F$

ii) $x.(\alpha.\beta) = (x.\alpha).\beta$; $(x+y).\alpha = x.\alpha + y.\alpha$; $x.(\alpha+\beta) = x.\alpha + x.\beta$; $\alpha.\beta = \beta.\alpha$, $\forall x,y \in K$, $\forall \alpha,\beta \in F$.

(Ceci implique que (F,T) est un corps commutatif et que $(K,+)$ est un espace vectoriel sur F).

III : La dimension de K en tant qu'espace vectoriel sur F est égale à deux.

IV : t étant un élément fixé de $K\backslash F$, l'équation : $\eta_2 + t\eta_1 = T(\xi_2+t\xi_1,m,k)$ possède une solution unique en $(\eta_2,\xi_2) \in F\times F$, quels que soient les éléments ξ_1 , η_1 de F et m,k de K , $m \neq 0$.

Un ternaire (K,T) dérivable relativement à un sous ternaire F sera noté (K,F,T) .

Remarque.

1) Si la condition IV de la définition 1 est vérifiée pour un certain élément t de $K\backslash F$, elle est aussi vérifiée pour tous les autres éléments de $K\backslash F$.

2) Dans le cas fini, la condition IV est automatiquement vérifiée, et on retrouve la définition d'Albert selon laquelle un ternaire (K,T) d'ordre q^2 ($q = p^h$, p nombre premier) est dit dérivable si $I'/(K,+)$ est un groupe commutatif et $II'/(K,T)$ contient un sous ternaire (F,T) d'ordre q, vérifiant les conditions i), ii), iii) de la définition 1.

Un dérivé d'un ternaire dérivable sera défini par :

Définition 2.

Soit (K,F,T) un ternaire géométrique dérivable et t un élément fixé de $K\backslash F$. Le dérivé de (K,F,T) relativement à l'élément t, est le ternaire (K,Φ) dont la loi Φ est définie par :

i) $\forall \beta \in F$, $\forall x,y \in K$: $\Phi(x,\beta,y) = T(x,\beta,y)$

ii) $\forall \alpha,\beta,\xi_1,\eta_1,\lambda_2,\mu_2 \in F$, $\alpha \neq 0$: $\Phi(\eta_1+t\xi_1,\beta+t\alpha,\mu_2+t\lambda_2) = \eta_2 + t\xi_2$ $\Leftrightarrow \eta_2 + t\eta_1 = T(\xi_2+t\xi_1,m,k)$ où m et k sont déterminés de manière unique par : $\alpha.m = t+\beta$ et $\mu_2 = T(\lambda_2,m,k)$.

Ce dérivé (K,Φ) sera noté $\partial(K,F,T,t)$ ou encore $\partial(K,F)$ si aucune confusion n'est à craindre.

Remarque.

Dans le cas fini, on retrouve, à un isotopisme près, la définition de ternaire dérivé d'Albert, et le ternaire dérivé est alors géométrique. Par contre dans le cas infini, les ternaires dérivés ne sont pas nécessairement géométriques.

Les deux propositions suivantes sont des extensions au cas infini de deux résultats connus dans le cas fini ([A]).

Proposition 1.

Soit (K,F,T) un ternaire dérivable et $\partial(K,F)$ son dérivé relatif à un élément t de $K\backslash F$. Si $\partial(K,F)$ est géométrique, il est dérivable et son dérivé relatif à t est le ternaire (K,T)

Démonstration : Notons (K,Φ) le dérivé du ternaire (K,F,T) relativement à l'élément t de $K\backslash F$. Comme l'on a : $\Phi(x,\alpha,k) = T(x,\alpha,k)$ pour tous $\alpha \in F$, $k \in K$, il est immédiat que le ternaire (K,Φ) , supposé géométrique, vérifie tous les axiomes des ternaires dérivables. On peut donc définir le dérivé (K,Θ) du ternaire géométrique (K,Φ) relativement au corps F et à l'élément t . La loi ternaire Θ est déterminée par :

i) $\forall \alpha \in F$, $\forall x,k \in K$: $\Theta(x,\alpha,k) = \Phi(x,\alpha,k)$

ii) $\forall \xi_1,\eta_1,\alpha,\beta,\lambda_2,\mu_2 \in F$, $\alpha \neq 0$, $\Theta(\eta_1+t\xi_1,\beta+t\alpha,\mu_2+t\lambda_2) = \eta_2+t\xi_2$
$\Leftrightarrow \eta_2 + t\eta_1 = \Phi(\xi_2+t\xi_1,m,k)$, m et k étant déterminés par :
$\Phi(\alpha,m,0) = t+\beta$ et $\mu_2 = \Phi(\lambda_2,m,k)$.

Posons $m = q+tp$, $k = s+tr$. Nécessairement on a : $p \neq 0$. D'où :

$$\Phi(\xi_2+t\xi_1,q+tp,s+tr) = \eta_2 + t\eta_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_2 + t\xi_2 = T(\eta_1+t\xi_1,m',k') \\ p.m' = t+q \\ s = T(r,m',k') \end{cases}$$

(où $p.m' = T(p,m',0)$).

Pour montrer que l'on a : $\Theta = T$, il nous faut établir les égalités : $m' = \beta+t\alpha$ et $k' = \mu_2 + t\lambda_2$.

Or : $\Phi(\alpha,q+tp,0) = t+p$ est équivalent au système :

$$\begin{cases} \beta+t\alpha = T(1,a,b) \\ p.a = t+q \\ 0 = b \end{cases}$$

Ce qui donne : $a = m' = \beta+t\alpha$. D'autre part, de l'équivalence suivante :

$$\Phi(\lambda_2,q+tp,s+tr) = \mu_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_2 + t\lambda_2 = T(0,c,k) \\ p.c = t+q \\ s = T(r,c,k) \end{cases}$$

nous tirons : $k = \mu_2 + t\lambda_2$; ce qui achève la démonstration de la proposition 1. //

Remarque.

Cette proposition nous indique que la dérivation est un procédé d'ordre deux.

Proposition 2.

Tout système V.W à droite (K,T) de dimension deux sur un nodule F commutatif est dérivable. Son dérivé relativement au corps F et à un élément t de K\F est linéaire et distributif à droite.

Démonstration : Les axiomes I , II et III des ternaires dérivables sont trivialement vérifiés . Examinons l'axiome IV. L'équation : $\eta_2 + t\eta_1 = T(\xi_2 + t\xi_1, m, k)$, s'écrit, en utilisant la linéarité de la loi T et la distributivité à droite : $\eta_2 + t\eta_1 = (t\xi_1).m + \xi_2.m + k$; c'est-à-dire : $t\eta_1 - (t\xi_1).m - k = \xi_2.m - \eta_2$. Or les éléments 1 et m forment une base de (K,+) considéré comme espace vectoriel sur F (pour la loi externe $(\alpha,x) \to \alpha.x$) . Par conséquent, les éléments ξ_2 et η_2 sont déterminés de manière unique en fonction des éléments η_1 , ξ_1 , m et k de F . Le système V.W à droite (K,T) est donc bien dérivable.

Soit (K,Φ) le dérivé de (K,T) relativement au corps F et à l'élément t de K\F . Montrons que la loi ternaire Φ est linéaire. Il nous suffit de vérifier que l'on a : $\Phi(x,m,0) + b = \Phi(x,m,b)$ pour tous x,m,b de K , $m \notin F$. Posons : $x = \eta_1 + t\xi_1$, $m = \beta + t\alpha$, $b = \mu_2 + t\lambda_2$. Nous avons les équivalences :

$$(1) \quad \eta_2 + t\xi_2 = \Phi(x,m,b) \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_2 + t\eta_1 = (\xi_2 + t\xi_1)\circ m' + k' \\ \alpha \circ m' = t + \beta \\ \mu_2 = \lambda_2 \circ m' + k' \end{cases}$$

et

$$(2) \quad \eta_2' + t\xi_2' = \Phi(x,m,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_2' + t\eta_1 = (\xi_2' + t\xi_1)\circ m'' + k'' \\ \alpha . m'' = t + \beta \\ 0 = k'' \end{cases}$$

et nous devons montrer que : $\xi_2 = \xi'_2 + \lambda_2$, $\eta_2 = \eta'_2 + \mu_2$.

(1) et (2) nous donnent : $\alpha.m' = t+\beta = \alpha.m''$; d'où $m' = m''$ (puisque α est supposé non nul). La distributivité à droite du ternaire (K,T) nous conduit alors à :

$$t\eta_1 - (t\xi_1).m' = \xi_2.m' + k' - \eta_2 = \xi'_2.m' - \eta'_2 = \xi_2.m'+\mu_2-\lambda_2.m'-\eta_2 .$$

D'où l'on en déduit : $(\xi'_2-\xi_2+\lambda_2)m' = \eta'_2 + \mu_2 - \eta_2$. Comme l'élément m' n'appartient pas au corps F , ceci entraîne : $\xi_2 = \xi'_2 + \lambda_2$ et $\eta_2 = \eta'_2 + \mu_2$. La loi Φ est donc bien linéaire. Un calcul tout à fait analogue nous montrerait de même que la loi Φ est distributive à droite, c'est-à-dire que l'on a, pour tous x,y,z dans K : $(x+y)*z = x*z + y*z$ (le produit $x*y$ désignant l'élément $\Phi(x,y,0)$) . La proposition 2 est démontrée.

Remarques.

1) La proposition précédente n'est plus valable si l'on remplace : "système V.W à droite", par "système V.W à gauche".

2) Le centre d'un système V.W à droite étant un nodule de ce système, on voit que tout système V.W à droite de dimension 2 sur son centre est dérivable.

Exemple.

Soit $(K,+,.)$ un corps commutatif, extension de degré 2 d'un corps F . K est trivialement dérivable. Soit t un élément de $K\backslash F$ dont le polynôme irréductible sur F est X^2-rX-s . D'après la proposition 2, le dérivé du corps K relativement au sous-corps F et à l'élément t est le ternaire linéaire distributif à droite $(K,\oplus,*)$ déterminé par :

$$\begin{cases} x\oplus y = x+y \quad , \quad x,y \in K \ , \ \alpha \in K \\ x*\alpha = x.\alpha \\ (\eta_1+t\xi_1).(\lambda_2+t\lambda_1) = \lambda_2.\eta_1 - \xi_1.\lambda_1^{-1}.(\lambda_2^2+r\lambda_2-s) + t(\lambda_1.\eta_1-\xi_1.\lambda_2-s.\xi_1) \ , \lambda_1 \neq 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire : le dérivé du corps K relativement au sous-corps F et à l'élément t de $K\backslash F$ de polynôme irréductible sur F : X^2-rX-s , est le

système de Hall construit à partir du corps F à l'aide du polynôme irréductible $X^2 + rX - s$ (il y a ainsi identité entre les systèmes de Hall et les dérivés des corps commutatifs quadratiques). Le corps des complexes est donc dérivable et son dérivé est le système de Hall construit à partir du corps des réels à l'aide du polynôme $X^2 + 1$. Ceci nous donne donc un exemple de ternaire dérivé infini géométrique.

§3 - DERIVATION DANS LES SEMI-CORPS.

Ce n'est que récemment que l'on a commencé à étudier les semi-corps dérivables et leurs dérivés ([3], 1971). Cependant les seuls exemples de semi-corps dérivables que l'on connaissait jusqu'à présent étaient donnés par une famille de semi-corps construits par Knuth en 1965, indépendamment de toute idée de dérivation. En effet, celui-ci, dans un article cherchant à présenter une théorie unifiée des semi-corps, étudie en particulier ceux qui sont de dimension 2 sur un nodule ([Kn] p. 212 à 216). Or, il se trouve que ces semi-corps là sont dérivables (proposition 2).

Nous allons étudier les dérivés des semi-corps dérivables, relativement à leurs automorphismes et ceci nous permettra de construire au chapitre suivant une nouvelle classe de semi-corps dérivables.

Nous rappelons ci-dessous les résultats de Knuth relatifs aux semi-corps de dimension 2 sur un nodule.

Proposition I.

Soit $(K,+,.)$ un semi-corps fini de dimension 2 sur un nodule F . Il existe alors un élément t de $K\backslash F$, un automorphisme σ du corps F et deux applications bilinéaires (par rapport au sous-corps premier de F) φ et ψ de $F\times F$ dans F , tels que le produit "." s'écrive :

$$(A) \quad : \quad (\xi_2+t\xi_1)\cdot(\mu_2+t\mu_1) = \xi_2\cdot\mu_2 + \varphi(\xi_1,\mu_1) + t.[\mu_2\cdot\xi_1+\xi_2^{\sigma}\cdot\mu_1+\psi(\xi_1,\mu_1)] .$$

Proposition II.

Le produit (A) de la proposition I est un produit de semi-corps dans chacun des cas suivants :

I : $\psi \equiv 0$, $\varphi(\xi_1,\mu_1) = s.\xi_1^{\alpha}.\mu_1^{\beta}$; α et β sont des automorphismes du corps F et s un élément de $F\setminus\{0\}$, distinct de $\xi_2^{\sigma+1}.\mu_1^{1-\beta}.\xi_1^{1-\sigma}$ quels que soient les éléments ξ,η,ζ de F , $\xi \neq 0$.

II : $\varphi(\xi_1,\mu_1) = s\mu_1\xi_1^{\sigma}, \psi(\xi_1,\mu_1) = r\mu_1\xi_1^{\sigma}$. r et s sont des éléments de F tels que le polynôme X^2+rX-s soit irréductible sur F .

III : $\varphi(\xi_1,\mu_1) = s\mu_1^{\bar{\sigma}^2}\xi_1^{\bar{\sigma}^1}$, $\psi(\xi_1,\mu_1) = r\mu_1^{\bar{\sigma}^1}\xi_1$; X^2+rX-s est irréductible sur F .

IV : $\varphi(\xi_1,\mu_1) = s\mu_1\xi_1^{\bar{\sigma}^1}$, $\psi(\xi_1,\mu_1) = r\mu_1\xi_1$; X^2+rX-s est irréductible sur F .

V : $\varphi(\xi_1,\mu_1) = s\mu_1^{\bar{\sigma}^2}\xi_1^{\sigma}$, $\psi(\xi_1,\mu_1) = r\mu_1^{\bar{\sigma}^1}\xi_1^{\sigma}$; X^2+rX-s est irréductible sur F .

Proposition III.

Soit K un semi-corps fini de dimension 2 sur un module F . Soient d'autre part Ng , Nm et Nd les noyaux à gauche, médian et à droite (respectivement) du semi-corps K . Alors :

i) F = Ng = Nm si et seulement si K est du type II

ii) F = Nd = Nm si et seulement si K est du type III

iii) F = Ng = Nd si et seulement si K est du type IV

Définition 3.

Un semi-corps du type I de Knuth associé aux automorphismes du corps F et à l'élément s de F sera noté $(F,\sigma,\alpha,\beta,s)$.

Il est de plus facile de voir :

Proposition 4.

Soit $K = (F,\sigma,\alpha,\beta,s)$ un semi-corps de Knuth du type I . Alors :

1) Si $\beta = \sigma\alpha = id$, le noyau médian Nm de K est l'ensemble des éléments $x = \gamma + t\delta$ de K tels que : $\gamma^{\bar{\sigma}^1} = \gamma^{\sigma}$ et $s^{\sigma}\delta^{\sigma} = s\delta^{\bar{\sigma}^1}$.

2) Si $\beta \neq id$ ou $\sigma_\alpha \neq id$, le noyau médian Nm de K est l'ensemble des éléments γ de F tels que : $\gamma^\alpha = \gamma^{\beta\sigma}$.

Proposition 5.

Soit K un semi-corps de Knuth du type V, construit sur le corps F à partir de l'automorphisme σ de F ($\sigma \neq id$) et des éléments r et s de F. Alors :

1) si $r = 0$ le noyau médian Nm de K est l'ensemble des éléments γ de F tels que $\gamma^{\sigma^2} = \gamma$.

2) si $r \neq 0$ le noyau médian Nm de K est l'ensemble des éléments γ de F tels que $\gamma^\sigma = \gamma$.

Les résultats de Knuth ayant été rappelés (propositions I, II et III), nous allons étudier maintenant les automorphismes des dérivés des semi-corps dérivables, finis ou infinis, dont le produit est de la forme (A) ci-dessus.

Nous poserons pour commencer :

Définition 4.

Soient F un corps (gauche), σ un antiautomorphisme de F, φ et ψ deux applications bilinéaires relativement au sous-corps premier de F, de $F \times F$ dans F. L'espace vectoriel à droite de dimension 2 sur F, $K = F + tF$, muni du produit (A), sera noté : (F,σ,φ,ψ) .

Remarques :

1) Si l'on remplace, dans la définition 4, l'élément de base t par un autre élément de base t', il est clair que le nouveau système obtenu est isomorphe au premier.

2) Par antiautomorphisme d'un corps $(F,+,.)$ nous entendons un automorphisme additif σ tel que $\sigma(x.y) = \sigma(y).\sigma(x)$ pour tous x,y dans F .

3) Les systèmes (F,σ,φ,ψ) ne sont pas nécessairement des semi-corps. Nous donnerons, au chapitre V, d'autres conditions que celles de Knuth,

pour qu'il en soit ainsi.

La proposition (immédiate) suivante est une réciproque de la proposition I de Knuth :

Proposition 6.

Si le système (F,σ,φ,ψ) est un semi-corps alors le corps F en est un nodule. Si de plus F est commutatif, le semi-corps (F,σ,φ,ψ) est dérivable.

Proposition 7.

Soit F un corps commutatif. Si $K = (F,\sigma,\varphi,\psi)$ est un semi-corps, son dérivé relativement au corps F et à l'élément t de $K\backslash F$ est le système $(K,+,*)$, distributif à droite, tel que :

i) son addition "+" est celle de l'espace vectoriel $F + tF$.

ii) sa multiplication "$*$" est définie par :

$$\begin{cases} (\eta_1+t\xi_1)*\lambda_2 = \eta_1\lambda_2 + t\xi_1\lambda_2 \quad ; \quad \eta_1,\xi_1,\lambda_2 \in F \\ (\eta_1+t\xi_1)*(\lambda_2+t\lambda_1) = \lambda_2[\eta_1^{\bar\sigma^1} - \xi_1^{\bar\sigma^1}\lambda_2^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1} - \bar\sigma^1\psi(\xi_1,\lambda_1^{-\sigma})] + \varphi(\xi_1,\lambda_1^{-\sigma}) \\ \qquad + t\lambda_1[\eta_1^{\bar\sigma^1} - \xi_1^{\bar\sigma^1}\lambda_2^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1} - \bar\sigma^1\psi(\xi_1,\lambda_1^{-\sigma})] \; ; \; \eta_1,\xi_1,\lambda_2,\lambda_1 \in F, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_1 \neq 0 \; . \end{cases}$$

Démonstration :

(F,σ,φ,ψ) étant un semi-corps est en particulier un système V.W à droite, donc, d'après la proposition 2, son dérivé est linéaire et distributif à droite. Il suffit alors d'appliquer directement la définition 2. //

Proposition 8.

En caractéristique différente de 2, les dérivés des semi-corps (F,σ,φ,ψ), F commutatif, ne sont pas distributifs à gauche.

Démonstration :

Supposons que le dérivé $(K,+,*)$ du semi-corps (F,σ,φ,ψ) soit distributif à gauche. Nous avons en particulier pour tous les éléments $\lambda_1,\xi_1,\eta_1,\lambda_2$ de F , $\lambda_1 \neq 0$:

$(\eta_1+t\xi_1)*(\lambda_2+t\lambda_1) = \eta_1*(\lambda_2+t\lambda_1) + (t\xi_1)*(\lambda_2+t\lambda_1)$, c'est-à-dire :

$$\eta_1\lambda_2 = \lambda_2(\eta_1^{\bar\sigma^1} - \xi_1^{\bar\sigma^1}\lambda_2^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1}) \quad \text{et} \quad \xi_1\lambda_2 + \lambda_1\eta_1^{\bar\sigma^1} = \lambda_1(\eta_1^{\sigma^{-1}} - \xi_1^{\bar\sigma^1}\lambda_2^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1}) \ .$$

Si nous faisons : $\xi_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, nous obtenons alors : $\eta_1 = \eta_1^{\bar\sigma^1}$. Ceci ayant lieu quel que soit l'élément η_1 de F , σ est l'application identique. La deuxième relation nous donne alors : $2\xi_1\lambda_2 = 0$. ξ_1 et λ_2 étant arbitraires nécessairement F est de caractéristique 2. //

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction de ce chapitre, nous allons maintenant étudier le groupe des automorphismes des systèmes dérivés des semi-corps dérivables.

Proposition 9.

Soit ∂K le dérivé d'un semi-corps $K = (F,\sigma,\varphi,\psi)$, F corps commutatif, et u une permutation de $K = F + tF$, semi-linéaire par rapport à F , c'est-à-dire : $u(\xi+t\eta) = \xi^\alpha + u(t)\eta^\alpha$, où α est un automorphisme de F . Posons $u(t) = q + tp$. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que u soit un automorphisme de ∂K est que :

1) $\sigma\alpha = \alpha\sigma$;
2) $[\psi(\xi_1^\alpha p, \lambda_1^{-\alpha\sigma} p^{-\sigma})]^{\bar\sigma^1} = [\psi(\xi_1,\lambda_1^{-\sigma})]^{\alpha\bar\sigma^1}$, $\forall \xi_1,\lambda_1 \in F$;
3) $[\varphi(\xi_1,\lambda_1^{-\sigma})]^\alpha = \varphi(\xi_1^\alpha p, \lambda_1^{-\sigma\alpha} p^{-\sigma})$.

Démonstration : Soit "*" le produit du dérivé du semi-corps $(F,\sigma,\varphi,\psi) = (F+tF,+,\cdot)$, relativement au corps F et à l'élément t . Nous garderons les notations des propositions 7 et 9 . Pour que u soit un automorphisme de ∂K il faut et il suffit que l'on ait :

$$u[(\eta_1+t\xi_1)*(\lambda_2+t\lambda_1)] = u(\eta_1+t\xi_1)*u(\lambda_2+t\lambda_1) \quad , \quad \forall\ \eta_1,\xi_1,\lambda_2,\lambda_1 \text{ de } F \ .$$

Posons : $(\eta_1+t\xi_1)*(\lambda_2+t\lambda_1) = \eta_2 + t\xi_2$, $\eta_1^\alpha + q\xi_1^\alpha = \eta_1'$, $\xi_1^\alpha p = \xi_1'$, $\lambda_2^\alpha + q\lambda_1^\alpha = \lambda_2'$, $\lambda_1^\alpha p = \lambda_1'$ et $(\eta_1'+t\xi_1')*(\lambda_2'+t\lambda_1') = \eta_2' + t\xi_2'$. Nous voulons : (1) $\eta_2' = \eta_2^\alpha + q\xi_2^\alpha$ et $\xi_2' = p\xi_2^\alpha$. Si $\lambda_1 = 0$ la relation (1) est toujours vérifiée. Supposons donc $\lambda_1 \neq 0$. La relation $p\xi_2^\alpha = \xi_2'$ s'écrit alors :

$$p\lambda_1^\alpha[\eta_1^{\alpha\bar\sigma^1} - \xi_1^{\alpha\bar\sigma^1}\lambda_2^{\alpha\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\alpha\sigma} - \alpha\bar\sigma^1\psi(\xi_1,\lambda_1^{-\sigma})]$$

$$= p\lambda_1^\alpha[\eta_1^{\bar\sigma^1\alpha} + q^{\bar\sigma^1\alpha}\xi_1^{\bar\sigma^1\alpha} - \xi_1^{\bar\sigma^1\alpha}p^{\bar\sigma^1}(\lambda_2^{\bar\sigma^1\alpha}+q^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{\bar\sigma^1\alpha})p^{-\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1\alpha} - \bar\sigma^1\psi(p\xi_1^\alpha, p^{-\sigma}\xi_2^{-\sigma\alpha})] .$$

Comme l'élément p est non nul (puisque u est une bijection), si l'on prend $\xi_1 = 0$, cette dernière égalité nous donne : $\eta_1^{\bar\sigma^1\alpha} = \eta_1^{\alpha\bar\sigma^1}$, quel que soit l'élément η_1 de F ; c'est-à-dire : les automorphismes α et σ commutent. Nous supposerons donc cette condition vérifiée dans la suite. La relation $p\xi_2^\alpha = \xi_2'$, devient alors :

$$\alpha\bar\sigma^1\psi(\xi_1,\lambda_1^{-\sigma}) = \bar\sigma^1\psi(p\xi_1^\alpha, p^{-\sigma}\xi_2^{-\sigma\alpha}) .$$

Ainsi les conditions 1) et 2) de la proposition 9 forment une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait : $p\xi_2^\alpha = \xi_2'$. Examinons maintenant la relation $\eta_2' = \eta_2^\alpha + q\xi_2^\alpha$. Celle-ci s'écrit :

$$\xi_2'\lambda_2'\lambda_1'^{-1} + \varphi(\xi_1',\lambda'^{-\sigma}) = \xi_2^\alpha\lambda_2^\alpha\lambda_1^{-\alpha} + \varphi^\alpha(\xi_1,\lambda_1^{-\sigma}) + q\xi_2^\alpha .$$

Ou encore, supposant réalisée la condition nécessaire $\xi_2' = p\xi_2^\alpha$: $\varphi(\xi_1^\alpha p, \lambda_1^{-\sigma\alpha}p^{-\sigma}) = \varphi^\alpha(\xi_1,\lambda_1^{-\sigma})$. Ceci achève la démonstration de la proposition 9 . //

Exemple.

Soient F un corps commutatif, σ l'application identique sur F , $X^2 - rX - s$ un polynôme irréductible sur F , $\varphi(\xi_1,\mu_1) = r\xi_1\mu_1$. Le système (F,σ,φ,ψ) est alors le corps $F[t]$ (t élément quadratique sur F dont le polynôme irréductible est X^2-rX-s) , et son dérivé relativement à F et t est un système de Hall. Les conditions de la proposition 9 sont toutes vérifiées et l'on retrouve ainsi le fait connu (dans le cas fini) que les systèmes de

Hall ont tous les F-automorphismes possibles.

Nous allons maintenant déterminer les semi-corps dérivables $(F,\sigma,\varphi,\psi) = K$ dont les dérivés ont, comme les systèmes de Hall, un groupe d'automorphismes laissant le corps F invariant élément par élément, et transitif sur les éléments de $K\backslash F$. Un tel groupe sera appelé : (Définition 5) groupe complet de F-automorphismes.

Proposition 10.

Une condition nécessaire et suffisante pour que le dérivé d'un semi-corps (F,σ,φ,ψ) (F commutatif), ait un groupe complet de F-automorphismes est que pour tous ξ,η dans F on ait : $\varphi(\xi,\eta) = \varphi(\xi\eta^{\bar{\sigma}^1},1)$ et $\psi(\xi,\eta) = \psi(\xi\eta^{\bar{\sigma}^1},1)$.

Démonstration : Gardons les notations de la proposition 9. Les conditions 2 et 3 de celle-ci doivent être vérifiées quel que soit $p \neq 0$. En particulier, si nous prenons $p = \lambda_1^{-1}$ nous devons avoir : $\varphi(\xi_1,\lambda_1^{-\sigma}) = \varphi(\xi_1\lambda_1^{-1},1)$ et $\psi(\xi_1,\lambda_1^{-\sigma}) = \psi(\xi_1\lambda_1^{-1},1)$. C'est-à-dire, en posant $\eta = \lambda_1^{-\sigma}$: $\varphi(\xi_1,\eta) = \varphi(\xi_1\eta^{\bar{\sigma}^1},1)$ et $\psi(\xi_1,\eta) = \psi(\xi_1\eta^{\bar{\sigma}^1},1)$.

Réciproquement, si $\varphi(\xi,\eta) = \varphi(\xi\eta^{\bar{\sigma}^1},1)$ et $\psi(\xi,\eta) = \psi(\xi\eta^{\bar{\sigma}^1},1)$ les conditions de la proposition 9 (où l'on a supposé : α = identité) sont bien vérifiées. D'où la proposition 10. //

Les systèmes construits par le procédé de Cayley-Dickson classique ([Sc] p. 45) sont les systèmes (F,σ,φ,ψ) tels que : 1) σ^2 = identité et $\forall\xi \in F$, $\xi+\xi^\sigma$, $\xi\xi^\sigma$ sont dans le centre k de F ; 2) φ est de la forme : $(\xi,\eta) \mapsto s.\eta.\xi^\sigma$, $s\in k$, $3/\psi \equiv 0$. Ce procédé permet en particulier de construire le corps des complexes à partir du corps des réels, le corps des quaternions à partir du corps des complexes et le corps des nombres de Cayley à partir du corps des quaternions. Comme les applications φ et ψ ci-dessus satisfont les conditions de la proposition 10 nous poserons :

Définition 6.

On appelle système de Cayley-Dickson généralisé tout système (F,σ,φ,ψ) où φ et ψ sont tels que : $\varphi(\xi,\eta) = \varphi(\xi\eta^{\bar{\sigma}^1},1)$, $\psi(\xi,\eta) = \psi(\xi\eta^{\bar{\sigma}^1},1)$ pour tous ξ,η dans F .

Il sera commode de poser $f(\xi) = \varphi(\xi^{\bar{\sigma}^1},1)$ et $g(\xi) = \psi(\xi^{\bar{\sigma}^1},1)$. Le système (F,σ,φ,ψ) sera alors noté (F,σ,f,g) c'est-à-dire :

Définition 6'.

Soient F un corps gauche, σ un antiautomorphisme de F , f et g deux automorphismes du groupe additif $(F,+)$. Le système de Cayley-Dickson généralisé (F,σ,f,g) est l'espace vectoriel à droite de dimension 2 sur F , $F + tF$, muni du produit :

$$(\xi_2+t\xi_1)\cdot(\mu_2+t\mu_1) = \xi_2\mu_2 + f(\mu_1\xi_1^{\sigma}) + t[\mu_2\xi_1 + \xi_2^{\sigma}\mu_1 + g(\mu_1\xi_1^{\sigma})]$$

si $g \equiv 0$, (F,σ,f,g) est noté (F,σ,f) .

Nous terminons ce chapitre par une résolution du problème suivant : un système V.W à droite dérivable qui possède un groupe complet d'automorphismes, dérive-t-il d'un semi-corps et dans ce cas, duquel ? Nous commencerons par caractériser ces systèmes V.W à droite ;

Proposition 1.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système V.W à droite dérivable (K,F) possède un groupe complet de F-automorphismes est que son produit "$\cdot$" soit de la forme :

$$\begin{cases} (\beta+t\alpha)\cdot\gamma = \beta\gamma + t(\alpha\gamma) \quad ; \quad \alpha,\beta,\gamma \in F \\ (\beta+t\alpha)\cdot(\delta+t\gamma) = \delta[h(\bar{\gamma}^1\alpha) + g(\beta-\delta\bar{\gamma}^1\alpha)] + k(\beta-\delta\bar{\gamma}^1\alpha) + f(\bar{\gamma}^1\alpha) \\ \qquad\qquad + t\gamma[h(\bar{\gamma}^1\alpha) + g(\beta-\delta\bar{\gamma}^1\alpha)] \quad ; \alpha,\beta,\gamma,\delta \in F \ , \ \gamma \neq 0 \end{cases}$$

où f,g,h,k sont quatre endomorphismes du groupe additif $(F,+)$.

Démonstration : La condition est suffisante : on vérifie en effet immédiatement que tous les automorphismes F-linéaires de K , laissant fixe l'élément 1 , sont des automorphismes du système V.W à droite $(K,+,\cdot)$.

Réciproquement, considérons un système V.W à droite dérivable relativement à un "sous" corps F commutatif. Nous supposons que ce système possède un groupe complet de F-automorphismes. Etudions le produit $(\beta+t.\alpha)\cdot(\delta+t.\gamma)$; $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in F$. Si l'élément γ est nul, nous avons bien $(\beta+t.\alpha).\delta = \beta.\delta + (t.\alpha).\delta = t.(\alpha.\delta) + \beta.\delta$. Supposons donc $\gamma \neq 0$. Par hypothèse, il existe un F-automorphisme φ de $(K,+,\cdot)$ tel que $\varphi(t) = -\delta\cdot\bar{\gamma}^{1} + t\cdot\bar{\gamma}^{1}$. En utilisant la distributivité à droite nous pouvons écrire : $(\beta+t\cdot\alpha)\cdot(\delta+t.\gamma) = \beta\cdot(t.\gamma+\delta) + (t.\alpha).(t.\gamma+\delta)$

$$= \bar{\varphi}^{1}[\varphi(t.\alpha).\varphi(t.\gamma+\delta)] + \bar{\varphi}^{1}[\varphi(\beta).\varphi(t.\gamma)+\delta)] \quad .$$

Or nous avons :

$$\varphi(t.\alpha).\varphi(\delta+t.\gamma) = [(t.\bar{\gamma}^{1}-\delta.\bar{\gamma}^{1}).\alpha].t = (t.\bar{\gamma}^{1}.\alpha).t - (\delta.\bar{\gamma}^{1}.\alpha).t$$

et

$$\varphi(\beta).\varphi(\delta+t.\gamma) = \beta.t \quad .$$

Définissons alors quatre applications f,g,h et k de F dans F par : $(t.\alpha).t = t.h(\alpha) + f(\alpha)$ et $\beta.t = t.g(\beta) + k(\beta)$. La propriété : $x.(\alpha+\beta) = x.\alpha + x.\beta$, vérifiée quels que soient x dans K , α,β dans F , montre que les applications f,g,h,k sont des endomorphismes du groupe $(K,+)$. Le produit "." a donc bien la forme indiquée et la proposition 11 est démontrée. //

Proposition 12.

Tout système V.W à droite dérivable (K,F) qui possède un groupe complet de F-automorphismes, est le dérivé d'un semi-corps.

Démonstration : Le produit d'un système V.W à droite dérivable nous est donné par la proposition 11. Si nous "dérivons" ce produit nous obtenons le nouveau produit "$\circ$" défini par :

$$\begin{cases} (\eta_1+t\xi_1)\circ\beta = \eta_1\beta + t.\xi_1\beta \\ (\eta_1+t\xi_1)\circ(\beta+t\alpha) = \beta\eta_1 - k(\alpha)\eta_1 + k\bar{g}^{1}[g(\alpha)\eta_1] - k\bar{g}^{1}h[g(\alpha)\xi_1] + f[g(\alpha).\xi_1] \\ \qquad\qquad + t\left[\bar{g}^{1}[g(\alpha)\eta_1] - \bar{g}^{1}h[g(\alpha)\xi_1] + (\beta-k(\alpha))\xi_1\right] \qquad \alpha \neq 0 \end{cases}$$

(nous avons gardé les notations de la proposition 11). Ce nouveau produit est bien distributif à droite et à gauche. Comme la dérivation est une opération d'ordre 2, la proposition 12 est démontrée. //

Le théorème suivant nous donne une nouvelle caractérisation des semi-corps de Cayley-Dickson généralisés (ne faisant pas intervenir la proposition I de Knuth).

Théorème 1.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système V.W à droite de dimension 2 sur un module F-commutatif possède un groupe complet de F-automorphismes est que ce soit le dérivé d'un semi-corps de Cayley-Dickson généralisé (F,σ,f,g) .

Démonstration : D'après la proposition 10 la condition est bien suffisante. Réciproquement, soit $(K,+,.)$ un système V.W à droite de dimension 2 sur un module commutatif F , et possédant un groupe complet de F , automorphismes. Le système K est dérivable (proposition 2) . Son produit est donc celui donné par la proposition 11. Gardons-en les mêmes notations. Nous devons avoir : $(\gamma.\beta).t = \gamma.(\beta.t)$ pour tous $\gamma.\beta$ dans F . C'est-à-dire : $k(\gamma.\beta) + tg(\gamma.\beta) = t.g(\gamma).g(\beta) + k(\beta)g(\gamma) + k(\gamma)$. On a donc : $g(\gamma.\beta) = g(\gamma).g(\beta)$ et $k \equiv 0$. On voit alors que le produit du système K est celui du dérivé du semi-corps de Cayley-Dickson généralisé (F,σ,f_1,g_1) où : $\bar{\sigma}^1 = g$, $f = f_1$, $h = \bar{\sigma}^1 g_1 \sigma$. Le théorème 1 est démontré. //

Théorème 2.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système V.W à droite soit un système de Hall est qu'il soit de dimension 2 sur son centre F et admette un groupe complet de F-automorphismes.

Démonstration : Nous avons déjà vu que la condition était nécessaire (proposition IV chapitre III). Réciproquement, soit $(K,+,.)$ un système V.W à droite de dimension 2 sur son centre F , admettant un groupe complet de F-automorphismes. D'après la proposition 2 ce système est dérivable et

son produit nous est donné par la proposition 11. Gardons les notations de cette proposition. Nous devons avoir : $\alpha.t = t.\alpha$ quel que soit α dans F. C'est-à-dire : $t.g(\alpha) + k(\alpha) = t.\alpha$ pour tout α dans F. Ceci implique donc : g = identité et $k \equiv 0$. Nous devons avoir aussi $(t.\alpha).t = t^2.\alpha$, c'est-à-dire, si l'on pose : $t^2 = tr + s$: $t.h(\alpha) + f(\alpha) = t(r.\alpha) + s.\alpha$ pour tout α dans F. Par conséquent, h et f sont respectivement les applications : $\alpha \mapsto t.\alpha$ et $\alpha \mapsto s.\alpha$. Le produit du système K est bien un produit de Hall. Ceci démontre le théorème 2. //

Les systèmes de Hall étant les dérivés de corps commutatifs, la proposition 14 est aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système V.W à droite dérive d'un corps commutatif.

Remarque.

La proposition 11 et le théorème 2 sont à rapprocher de certains résultats d'Ostrom et Morgan ([O.M]).

CHAPITRE V

SYSTEMES DE CAYLEY-DICKSON GENERALISES

Nous allons étudier dans ce chapitre les systèmes de Cayley-Dickson généralisés du type (F,σ,f) (définition 6', chapitre IV). Etant donné un tel système, nous déterminons ses différents noyaux et nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il soit un semi-corps. Ceci nous permet de définir une classe de semi-corps dérivables qui ne sont isotopes à aucun des semi-corps dérivables de Knuth.

Nous montrons enfin que les dérivés des semi-corps (F,σ,f) , F corps commutatif, sont toujours géométriques. Ces dérivés généralisent et étendent au cas infini les systèmes de Kirkpatrick ([Ki]).

§1 - PROPRIETES ALGEBRIQUES DES SYSTEMES (F,σ,f) .

Dans tout ce chapitre F désignera un corps (gauche), σ un anti-automorphisme du corps F et f un automorphisme du groupe additif $(F,+)$. Nous rappelons que (F,σ,f) désigne l'espace vectoriel à droite de dimension 2 sur F , $F+tF$ muni du produit :

$$(\xi_2+t\xi_1)(\mu_2+t\mu_1) = \xi_2\mu_2 + f(\mu_1\xi_1^{\sigma}) + t[\mu_2\xi_1 + \xi_2^{\sigma}\mu_1] \quad .$$

Proposition 1.

Soit (F,σ,f) un système de Cayley-Dickson généralisé. Alors :

i) (F,σ,f) est commutatif $\Leftrightarrow$ F est commutatif et σ = identité.

ii) (F,σ,f) est associatif $\Leftrightarrow$ F est commutatif, σ^2 = identité et l'application f est de la forme : $\xi \to s\xi$, où s est un élément du centre de F , stable par σ .

iii) (F,σ,f) est alternatif $\Leftrightarrow$ σ^2 = identité, $\xi+\xi^\sigma$ et $\xi\xi^\sigma$ sont dans le centre de F quel que soit l'élément ξ de F , et l'application f est de la forme : $\xi \to s\xi$, où s est un élément du centre de F , stable par σ .

iv) (F,σ,f) est associatif pour les puissances $\Rightarrow [f(1)]^\sigma = f(1)$.

Démonstration : L'équivalence i) est évidente.

ii) L'égalité : $[(\xi_2+t\xi_1)(\mu_2+t\mu_1)](\mu'_2+t\mu'_1) = (\xi_2+t\xi_1)[(\mu_2+t\mu_1)(\mu'_2+t\mu')]$ s'écrit, en explicitant le produit du système (F,σ,f) :

$$\begin{cases} f(\mu_1\xi_1^\sigma)\mu'_2 + f(\mu'_1\xi_1^\sigma\mu_2^\sigma) + f(\mu'_1\mu_1^\sigma\xi_2^{\sigma^2}) = \xi_2 f(\mu'_1\mu_1^\sigma) + f(\mu'_2\mu_1\xi_1^\sigma) + f(\mu_2^\sigma\mu'_1\xi_1^\sigma) & (1) \\ \mu'_2\mu_2\xi_1 + \mu'_2\xi_2^\sigma\mu_1 + \mu_2^\sigma\xi_2^\sigma\mu'_1 + f^\sigma(\mu_1\xi_1^\sigma)\mu'_1 = \mu_2\mu'_2\xi_1 + f(\mu'_1\mu_1^\sigma)\xi_1 \\ \qquad\qquad + \xi_2^\sigma\mu'_2\mu_2 + \xi_2^\sigma\mu_2^\sigma\mu'_1 & (2) \end{cases}$$

Le système (F,σ,f) est associatif si et seulement si : (1) = (2) , quels que soient $\xi_2,\xi_1,\mu_2,\mu_1,\mu'_2$ et μ'_1 dans F . Faisons, dans l'égalité (2) : $\xi_1 = 1$, $\mu_1 = \mu'_1 = 0$. On obtient alors : $\mu'_2\mu_2 = \mu_2\mu'_2$ et ainsi le corps F est commutatif. L'associativité de (F,σ,f) est ainsi équivalente au système :

$$\begin{cases} f(\mu_1\xi_1^\sigma)\mu'_2 + f(\mu'_1\mu_1^\sigma\xi_2^{\sigma^2}) = \xi_2 f(\mu'_1\mu_1^\sigma) + f(\mu'_2\mu_1\xi_1^\sigma) \ , \ \forall\mu_1,\xi_1,\mu'_1,\mu'_2,\xi_2 & (1)' \\ f^\sigma(\mu_1\xi_1^\sigma)\mu'_1 = f(\mu'_1\mu_1^\sigma)\xi_1 \ , \ \forall\mu_1,\xi_1,\mu'_1 & (2)' \end{cases}$$

Prenons maintenant : $\mu'_1 = 0$, $\xi_1 = \mu_1 = 1$. La relation (1)' nous donne : $f(\mu'_2) = \mu'_2 f(1)$. Posons $f(1) = s$. Le système $\{(1)',(2)'\}$ est alors équivalent à : $\xi_2^{\sigma^2} = \xi_2$, pour tout ξ_2 dans F , et $s^\sigma = s$. Ceci démontre l'équivalence ii).

iii) La condition : $a^2x = a(ax)$, s'écrit, en posant : $a = \xi_2 + t\xi_1$

et $x = \mu'_2 + t\mu'_1$:

$$\begin{cases} f(\xi_1\xi_1^\sigma)\mu'_2 + f(\mu'_1\xi_1^\sigma\xi_2^\sigma) + f(\mu'_1\xi_1^\sigma\xi_2^{\sigma^2}) = \xi_2 f(\mu'_1\xi_1^\sigma) + f(\mu'_2\xi_1\xi_1^\sigma) + f(\xi_2^\sigma(\mu'_1\xi_1^\sigma) \\ \mu'_2\xi_2\xi_1 + \mu'_2\xi_2^\sigma\xi_1 + f^\sigma(\xi_1\xi_1^\sigma)\mu'_1 = \xi_2\mu'_2\xi_1 + f(\mu'_1\xi_1^\sigma)\xi_1 + \xi_2^\sigma\mu'_2\xi_1 \end{cases} .$$

Remplaçons dans les deux égalités μ'_1 par 0 et ξ_1 par 1 . Nous en déduisons alors que f est l'application : $\xi \to s\xi$ $(s = f(1))$ et que $\xi_2 + \xi_2^\sigma$ est dans le centre de F . La première égalité nous donne alors : $\xi_1\xi_1^\sigma\mu'_2 = \mu'_2\xi_1\xi_1^\sigma$ c'est-à-dire: l'élément $\xi_1\xi_1^\sigma$ est toujours dans le centre du corps F . Supposons maintenant : $\mu'_2 = 0$, $\xi_1 = \mu'_1$. De la deuxième égalité nous tirons : $s^\sigma = s$ et $\xi_1^{\sigma^2}\xi_1^\sigma s = s\xi_1\xi_1^\sigma = \xi_1\xi_1^\sigma s$. D'où : $\sigma^2 =$ identité. Dans ces conditions, la première égalité devient : $\xi_2^\sigma s = s\xi_2^\sigma$. Ceci démontre le sens direct de l'équivalence iii).

La réciproque est une vérification facile.

iv) Si (F,σ,f) est associatif pour les puissances on a en particulier : $aa^2 = a^2a$ quel que soit l'élément a de F . Ayant posé $a = \xi_2 + t\xi_1$ la deuxième égalité du iii) nous donne, après avoir pris : $\xi_2 = 0$, $\xi_1 = 1$: $f^\sigma(1) = f(1)$. Ceci démontre iv) et achève la démonstration de la proposition 1. //

Remarque.

Les conditions imposées au système (F,σ,f) pour qu'il soit alternatif sont précisément les conditions pour que le système (F,σ,f) soit un système de Cayley-Dickson classique.

Nous allons maintenant déterminer les différents noyaux des semi-corps de Cayley-Dickson généralisés.

Proposition 2.

Soit (F,σ,f) *un semi-corps de Cayley-Dickson généralisé non associatif, et soit* N_m (*respectivement* N_d , N_g), *son noyau médian* (*respectivement à droite, à gauche*). *Alors*

1°) Nm est le centre du corps F .

2°) a) Si $f = \xi \to \xi^{\bar{\sigma}^2} s$ $(s \in F)$ et si F est commutatif, Nd est l'ensemble des éléments $x = \mu + t\lambda$ de (F,σ,f) tels que $\mu = \mu^{\bar{\sigma}^2}$ et $s^{\sigma}\lambda = s\lambda^{\bar{\sigma}^2}$.

b) Si f n'est pas de la forme : $\xi \to \xi^{\bar{\sigma}^2} s$ $(s \in F)$ ou si F est non commutatif, Nd est l'ensemble des éléments μ du centre de F , tels que pour tout élément a de F on ait : $f(a\mu) = f(a)\mu$.

3°) a) Si $f = \xi \to s\xi$ $(s \in F)$ et si F est commutatif, Ng est l'ensemble des éléments $x = \mu + t\lambda$ de (F,σ,f) tels que $\mu^{\sigma^2} = \mu$ et $s^{\sigma}\lambda^{\sigma^2} = \lambda s$.

b) Si f n'est pas de la forme : $\xi \to s\xi$ ou si f n'est pas commutatif Ng est l'ensemble des éléments μ du centre de F tels que $f(a\mu^{\sigma^2}) = \mu f(a)$ pour tout élément a de F .

Démonstration : Rappelons, pour commencer, que l'égalité :

$$[(\xi_2 + t\xi_1)(\mu_2 + t\mu_1)](\mu_2' + t\mu_1') = (\xi_2 + t\xi_1)[(\mu_2 + t\mu_1)(\mu_2' + t\mu_1')] ,$$

est équivalente au système :

$$\begin{cases} f(\mu_1\xi_1^{\sigma})\mu_2' + f(\mu_1'\xi_1^{\sigma}\mu_2^{\sigma}) + f(\mu_1'\mu_1^{\sigma}\xi_2^{\sigma^2}) = \xi_2 f(\mu_1'\mu_1^{\sigma}) + f(\mu_2'\mu_1\xi_1^{\sigma}) + f(\mu_2^{\sigma}\mu_1'\xi_1^{\sigma}) & (1) \\ \mu_2'\mu_2\xi_1 + \mu_2'\xi_2^{\sigma}\mu_1 + \mu_2^{\sigma}\xi_2^{\sigma}\mu_1' + f^{\sigma}(\mu_1\xi_1^{\sigma})\mu_1' = \mu_2\mu_2'\xi_1 + f(\mu_1'\mu_1^{\sigma})\xi_1 + \xi_2^{\sigma}\mu_2'\mu_1 + \xi_2^{\sigma}\mu_2^{\sigma}\mu_1' & (2) \end{cases}$$

1°) Soit $\mu_2 + t\mu_1$ un élément du noyau médian Nm . Les égalités (1) (2) ont alors lieu quels que soient les éléments ξ_2, ξ_1, μ_2' et μ_1' de F . Montrons que ceci implique : $\mu_1 = 0$. Supposons le contraire. Faisons, dans (1), $\mu_1' = 0$ et $\xi_1^{\sigma} = \mu_1^{-1}$. Nous obtenons : $f(1)\mu_2' = f(\mu_2')$. Ceci ayant lieu pour tout élément μ_2' , f est l'application : $\xi \to s\xi$. Si nous faisons maintenant $\mu_1' = \xi_1 = 0$ dans (2) nous arrivons à : $\mu_2'\xi_2^{\sigma} = \xi_2^{\sigma}\mu_2'$ et ainsi F est commutatif. Mais alors (1) nous donne (en prenant $\xi_1 = 0$) : $\xi_2^{\sigma^2} = \xi_2$ c'est-à-dire : $\sigma^2 =$ identité. Nous déduisons de l'égalité (2) (avec $\xi_2 = 0$, $\mu_2' = 0$, $\xi_1 = \mu_1' = 1$) : $s^{\sigma} = s$. Or d'après la proposition 1 ceci implique que le système (F,σ,f) est associa-

tif, ce qui n'est pas. Donc $\mu_1 = 0$. Les équations (1) et (2) se réduisent à :

$$\mu_2'\mu_2\xi_1 + \mu_2^\sigma\xi_2^\sigma\mu_1' = \mu_2\mu_2'\xi_1 + \xi_2^\sigma\mu_2^\sigma\mu_1' \quad (\xi_1,\xi_2,\mu_2',\mu_1' \text{ arbitraires}) \ ;$$

ce qui est équivalent à ce que l'élément μ_2 soit dans le centre de F . La propriété 1°) est démontrée.

2°) et 3°) : La détermination des noyaux à droite et à gauche se fait d'une manière tout à fait analogue à la précédente. //

§2 - "GEOMETRICITE" DES SYSTEMES (F,σ,f) .

Parmi les systèmes de Cayley-Dickson généralisés nous nous intéressons principalement à ceux qui coordonnent un plan projectif, c'est-à-dire à ceux qui sont des semi-corps. Ces semi-corps sont caractérisés par le théorème suivant :

Théorème 1.

Soit (F,σ,f) un système de Cayley-Dickson généralisé. Une condition nécessaire et suffisante pour que le système (F,σ,f) soit un semi-corps est que les deux équations : i) $f(x\alpha) = \beta x + b$, ii) $f^\sigma(\alpha x^\sigma) = \gamma x + b$ possèdent une et une seule solution en x , quels que soient : l'élément b de F , les éléments α,β de F de la forme $\lambda\lambda^\sigma$, $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, et l'élément γ de F de la forme $\lambda^\sigma\lambda$, $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$.

Démonstration : Le système (F,σ,f) sera un semi-corps si et seulement si ses éléments non nuls munis de la multiplication forment une boucle ; c'est-à-dire si les équations $ax = b$ et $xa = b$ ont une et une seule solution en $x \neq 0$ pour a et b fixés, non nuls. Posons $a = \alpha_2 + t\alpha_1$, $b = \beta_2 + t\beta_1$, $x = \xi_2 + t\xi_1$. L'équation $ax = b$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} \alpha_2\xi_2 + f(\xi_1\alpha_1^\sigma) = \beta_2 \\ \xi_2\alpha_1 + \alpha_2^\sigma\xi_1 = \beta_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Si $\alpha_1 = 0$, le système (1) a bien une solution unique qui est : $\xi_1 = \alpha_2^{-\sigma}\beta_1$, $\xi_2 = \alpha_2^{-1}\beta_2$. Soit donc $\alpha_1 \neq 0$. Le système (1) est alors équivalent au système :

$$\begin{cases} \xi_2 = (\beta_1 - \alpha_2^{\sigma}\xi_1)\alpha_1^{-1} \\ \alpha_2\beta_1\alpha_1^{-1} - \alpha_2\alpha_2^{\sigma}\xi_1\alpha_1^{-1} + f(\xi_1\alpha_1^{\sigma}) = \beta_2 \end{cases} \qquad (1)' \quad .$$

La deuxième équation de (1)' peut s'écrire :

$$\alpha_2\beta_1\alpha_1^{-1} - \alpha_2\alpha_2^{\sigma}\xi_1\alpha_1^{-1} + f(\xi_1\alpha_1^{-1}\alpha_1\alpha_1^{\sigma}) = \beta_2 \ .$$

Or si nous posons $\xi_1\alpha_1^{-1} = u$, $\alpha_1\alpha_1^{\sigma} = \alpha$, $\alpha_2\alpha_2^{\sigma} = \beta$, $\beta_2 - \alpha_2\beta_1\alpha_1^{-1} = b$, nous voyons que la résolution de cette équation (et donc du système (1)') est équivalente à la résolution de l'équation en x : $f(u\alpha) = \beta u + b$, où α et β sont de la forme $\lambda\lambda^{\sigma}$.

Etudions maintenant l'équation $xa = b$. Celle-ci est équivalente au système :

$$\begin{cases} \xi_2\alpha_2 + f(\alpha_1\xi_1^{\sigma}) = \beta_2 \\ \alpha_2\xi_1 + \xi_2^{\sigma}\alpha_1 = \beta_1 \end{cases} \qquad (2) \quad .$$

Si $\alpha_1 = 0$, le système (2) a bien une solution unique qui est : $\xi_1 = \alpha_2^{-1}\beta_1$, $\xi_2 = \beta_2\alpha_2^{-1}$. Supposons donc $\alpha_1 \neq 0$. Le système (2) est alors équivalent au système :

$$\begin{cases} \xi_2^{\sigma} = (\beta_1 - \alpha_2\xi_1)\alpha_1^{-1} \\ \alpha_2^{\sigma}\beta_1\alpha_1^{-1} - \alpha_2^{\sigma}\alpha_2\xi_1\alpha_1^{-1} + f^{\sigma}(\alpha_1\xi_1^{\sigma}) = \beta_2^{\sigma} \end{cases} \qquad (2)' \quad .$$

La deuxième équation du système (2)' peut s'écrire :

$$\alpha_2^{\sigma}\beta_1\alpha_1^{-1} - \alpha_2^{\sigma}\alpha_2\xi_1\alpha_1^{-1} + f^{\sigma}(\alpha_1\alpha_1^{\sigma}\alpha_1^{-\sigma}\xi_1^{\sigma}) = \beta_2^{\sigma} \ .$$

C'est-à-dire, en posant $u = \xi_1\alpha_1^{-1}$, $\alpha = \alpha_1\alpha_1^{\sigma}$, $\beta = \alpha_2^{\sigma}\alpha_2$, $b = \beta_2^{\sigma} - \alpha_2^{\sigma}\beta_1\alpha_1^{-1}$: $f^{\sigma}(\alpha u^{\sigma}) = \beta u + b$. Ceci achève de démontrer le théorème 1. //

Nous allons appliquer ce théorème aux systèmes (F, σ, f) construits à partir des corps F "quadratiques" dans le sens suivant :

Définition 1.

Soit F un corps et k un sous-corps du centre de F . F est dit quadratique sur k si il existe un antiautomorphisme σ de F , involutif (σ^2 = identité), laissant k fixe élément par élément et tel que pour tout élément α de F , les éléments $\alpha\alpha^\sigma$ et $\alpha+\alpha^\sigma$ appartiennent à k .

Théorème 2.

Soit F un corps quadratique sur le corps k (commutatif) relativement à l'antiautomorphisme involutif σ , et soit f un automorphisme linéaire de l'espace vectoriel F sur k . Une condition nécessaire et suffisante pour que le système de Cayley-Dickson généralisé (F,σ,f) soit un semi-corps est que f n'ait aucune valeur propre dans le sous-ensemble $M_\sigma = \{\alpha\in F, \exists\lambda \in F \,;\, \alpha = \lambda\lambda^\sigma\}$ de k .

Démonstration : Il est immédiat que sous les hypothèses du théorème 2, les conditions i) et ii) du théorème 1 sont équivalentes. D'autre part, F étant un corps quadratique sur k est de dimension finie sur k ([He]p. 159) donc la condition i) du théorème 1 est équivalente à l'injectivité des applications $x \mapsto f(x_\alpha)-\beta x$, $\alpha,\beta \in M_\sigma$. L'application f étant injective ne possède pas la valeur propre 0 . Or l'ensemble $M_\sigma\setminus\{0\}$ est manifestement un groupe et ainsi la condition $\forall x \neq 0$, $\forall\alpha,\beta \in M_\sigma\setminus\{0\}$, $f(x_\alpha) \neq \beta x$ s'écrit : $\forall x \neq 0$, $\forall\gamma = \alpha^{-1}\beta \in M_\sigma\setminus\{0\}$: $f(x) \neq \gamma x$ et ceci démontre le théorème 2. //

Remarques.

La condition du théorème 2 est en particulier vérifiée si le polynôme caractéristique de f est irréductible sur k .

Exemples :

Il n'y a aucune difficulté pour trouver des applications f vérifiant la condition du théorème 2. Les exemples suivants sont les plus simples parmi bien d'autres :

1) Soient $F = \mathbb{C}$ le corps des complexes, $\sigma = z \mapsto \bar{z}$ la conjugaison complexe, s un réel < 0 et f l'application : $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(z) = sz \in \mathbb{C}$.

Les conditions du théorème 2 sont trivialement vérifiées et (F,σ,f) est un semi-corps isomorphe au corps $\mathbb{H}$ des quaternions.

2) Remplaçons dans l'exemple 1) l'hypothèse : "s réel < 0" par "$s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$" . Les conditions du théorème 2 sont vérifiées et le système (F,σ,f) est cette fois-ci un semi-corps non associatif pour les puissances, donc non isotope au corps des quaternions.

Cet exemple nous montre que, contrairement au procédé de Cayley-Dickson classique, le procédé de Cayley-Dickson généralisé permet de construire des semi-corps de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, non associatifs pour les puissances.

3) Soient : $F = \mathbb{C}$, σ la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$ et f l'application $\mathbb{R}$ linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Les conditions du théorème 2 sont encore vérifiées et le système (F,σ,f) est encore un semi-corps non associatif pour les puissances de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.

4) Soient $F = \mathbb{H}$ le corps des quaternions, σ la conjugaison quaternionienne : $q \mapsto \bar{q}$, s un réel < 0 , et f l'application : $\mathbb{H} \ni q \mapsto sq \in \mathbb{H}$. Les conditions du théorème 2 sont vérifiées et le système (F,σ,f) est un semi-corps isomorphe au semi-corps alternatif des nombres de Cayley.

5) Si dans l'exemple précédent l'on remplace la condition : "$s \in \mathbb{R}, s<0$" par "$s \in \mathbb{H}\backslash\mathbb{R}$" , on obtient un semi-corps de dimension 8 sur $\mathbb{R}$, non associatif pour les puissances, et donc non isotope au semi-corps des nombres de Cayley.

6) Soient $F = GF(q^2)$ le corps fini à q^2 éléments $(q = p^h$, p premier impair) et $k = GF(q)$ le corps fini à q éléments, σ l'automorphisme $x \mapsto x^q$ du corps F et f l'automorphisme du k-espace vectoriel F défini par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s & 0 \end{pmatrix}$, où s est un élément non carré dans $GF(q^2)$.

Le polynôme caractéristique de f est irréductible sur k et ainsi le système (F,σ,f) est un semi-corps non associatif pour les puissances, d'ordre q^4 .

§3 - CONSTRUCTION D'UNE NOUVELLE CLASSE DE SEMI-CORPS DERIVABLES.

Nous allons, à l'aide du théorème 2, construire une famille de semi-corps de Cayley-Dickson généralisés finis, qui ne sont isotopes à aucun des semi-corps dérivables de Knuth (chapitre IV, proposition II), (donnant ainsi de nouveaux exemples de semi-corps dérivables).

Définition 2.

Soient : h un entier ≥ 2 , $F = GF(2^{2h})$ le corps fini à $2^{2h} = q^2$ éléments, X^2-rX-s un polynôme à coefficients dans $GF(q)$ irréductible sur $GF(q)$, t un élément de $GF(q^2)-GF(q)$ tel que $t^2 = tr+s$, σ l'automorphisme : $x \mapsto x^q$ de F et f l'application $GF(q)$ - linéaire de F dans F représentée dans la base $\{1,t\}$ par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & s\lambda^{-1} \\ \lambda & r \end{pmatrix}$, $\lambda \in GF(q)$, $\lambda \neq 0$. Le système de Cayley-Dickson généralisé (F,σ,f) associé aux objets F,σ,f définis ci-dessus sera noté $D(h,r,s,\lambda)$.

Proposition 3.

Tout système $D(h,r,s,\lambda)$ est un semi-corps (non associatif pour les puissances).

Démonstration : Ceci provient directement du fait que le corps $GF(q^2)$ est quadratique (au sens de la définition 1) sur le corps $GF(q)$ relativement à l'automorphisme $\sigma : x \mapsto x^q$ et de ce que le polynôme caractéristique de l'application linéaire f est le polynôme X^2-rX-s , irréductible sur $GF(q)$. //

Nous pouvons alors énoncer :

Théorème 3.

Pour tout $h \geq 2$, tout $\lambda \in GF(2^h)$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$, tout polynôme X^2-rX-s irréductible sur $GF(2^h)$, le semi-corps dérivable $D(h,r,s,\lambda)$ n'est isotope à aucun des semi-corps dérivables de Knuth.

Démonstration : Considérons donc un semi-corps $(F,\sigma,f) = D(h,r,s,\lambda)$. Pour montrer qu'il n'est isotope à aucun des semi-corps dérivables de Knuth (définis à la proposition II du chapitre IV), il nous suffit de montrer, d'après la proposition II du chapitre III, qu'aucun des semi-corps de Knuth n'a son noyau à gauche (respectivement à droite, médian) isomorphe au noyau correspondant du semi-corps $D(h,r,s,\lambda)$. Par construction, l'application f définie par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & s\lambda^{-1} \\ \lambda & r \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 1$, n'est pas de la forme : $\alpha \mapsto s\alpha$ ($s \in GF(q^2)$) . Ainsi, les noyaux médians, à droite et à gauche du semi-corps $D(h,r,s,\lambda)$ sont respectivement : $Nm = F = GF(q^2)$, $Nd = Ng = GF(q)$. Ceci nous montre déjà que $D(h,r,s,\lambda)$ ne peut être isotope à un semi-corps de Knuth du type II, III ou IV, construit à partir du corps F , puisqu'un tel semi-corps possède deux de ses noyaux identiques au corps F (proposition III, chapitre IV). D'autre part, parmi les semi-corps non associatifs du type V de Knuth, les seuls dont le noyau médian est F sont ceux de la forme (F,τ,g) avec τ^2 = identité et $g = \xi \mapsto a\xi$, $a \in GF(q^2)$ (d'après la proposition 5, chapitre IV). Mais, comme dans ces conditions, leur noyau à droite contient F (proposition 2), ils ne peuvent être isotopes au semi-corps $D(h,r,s,\lambda)$. Par conséquent, les seuls semi-corps dérivables de Knuth pouvant être isotopes au semi-corps $(F,\sigma,f) = D(h,r,s,\lambda)$ sont les semi-corps $F(\tau,\alpha,\beta,s_1)$ (définition 3, chapitre IV). Comme nous sommes en caractéristique 2, nécessairement α et τ sont distincts de l'identité (sinon nous n'aurions plus à faire à des semi-corps). Supposons d'abord que l'on ait β = identité. Si $\tau\alpha$ = identité, pour que le semi-corps $F(\tau,\alpha,\beta,s_1)$ ait un noyau médian identique à F , il faut que l'on ait τ^2 = identité (proposition 4, chapitre IV). Mais alors $\alpha = \tau$ et le semi-corps $F(\tau,\alpha,\beta,s_1)$ est égal au semi-corps (F,τ,g) pour $g : \xi \mapsto s_1\xi$ et nous avons vu que ce dernier ne pouvait être isotope au semi-corps $D(h,r,s,\lambda)$ dont nous nous occupons. Si maintenant on suppose $\tau\alpha \neq$ identité, pour que le noyau médian du semi-corps $F(\tau,\alpha,\beta,s_1)$ soit identique à F , il nous faut : $\alpha = \beta\tau = \tau$ et le semi-corps $(F,\tau,\alpha,\beta,s_1)$ est égal au semi-corps (F,τ,g) pour $g : \xi \mapsto s_1\xi$. Si l'on veut que son noyau à gauche soit identique au corps $GF(q)$, nécessairement on doit prendre τ^2 = identité (proposition 2) et nous

retournons au cas précédent. Nous supposerons donc dorénavant : $\beta \neq$ identité. Sous cette condition, pour avoir un noyau médian isomorphe au corps F il faut et il suffit que l'on ait $\alpha = \beta\tau$. Mais alors le semi-corps $F(\tau,\beta\tau,\beta,s_1)$ se trouve être identique au semi-corps de Cayley-Dickson généralisé (F,τ,g) , pour $g = \xi \to s_1\xi^{\beta}$. L'automorphisme β n'étant pas l'identité, le noyau à gauche de (F,τ,g) est l'ensemble des éléments μ de $F = GF(q^2)$ tels que $\mu^{\beta\tau^2} = \mu$. Or nous voulons qu'il soit identique au corps $GF(q)$. Nous devons donc avoir : $\beta\tau^2 = \sigma$, σ étant l'automorphisme : $GF(q^2) \ni x \to x^q = \sigma(x) \in GF(q^2)$. Nous avons donc : $\beta \neq \tau^{-2}$ et par conséquent le noyau à droite de (F,τ,g) est l'ensemble des éléments μ de $GF(q^2)$ tels que $\mu^{\beta} = \mu$. Comme ce noyau doit être lui aussi identique au corps $GF(q)$, nous en déduisons : $\beta = \sigma$ et par suite $\tau^2 =$ identité, c'est-à-dire : $\tau = \sigma$. Ainsi, si un semi-corps de Knuth est isotope au semi-corps $D(h,r,s,\lambda)$, il est nécessairement de la forme (F,σ,g) avec $\sigma = x \to x^q$ et $g = x \to s_1x^q$ $(s_1 \in F)$. Or d'après le théorème 2, une condition nécessaire et suffisante pour que le système (F,σ,g) ci-dessus soit un semi-corps est que l'application $GF(q)$-linéaire $g : \xi \to s_1\xi^q$ n'ait aucune valeur propre dans $N_\sigma = \{\alpha\alpha^q \ , \ \alpha \in GF(q^2)\}$. Mais ceci ne peut avoir lieu car l'équation $s_1\xi^q = n\xi$ a toujours une solution en $\xi \neq 0$ et $n \in N_\sigma$. Il suffit en effet de prendre ξ tel que : $\xi^2 = s_1$ et $n = \xi\xi^q$. Ceci achève de montrer qu'aucun semi-corps de Knuth n'est isotope au semi-corps $D(h,r,s,\lambda)$. //

Remarque.

La proposition III du chapitre III nous permet donc d'affirmer que les plans projectifs coordonnés par les semi-corps $D(h,r,s,\lambda)$ ne sont isomorphes à aucun des plans projectifs coordonnés par les semi-corps dérivables de Knuth. Cependant, rien ne nous permet à priori d'en déduire que les plans dérivés des premiers sont encore non isomorphes aux plans dérivés des seconds.

§4 - DERIVES DES SEMI-CORPS DE CAYLEY-DICKSON GENERALISES (F,σ,f) .

Nous terminons ce chapitre en montrant que les dérivés des semi-corps de Cayley-Dickson généralisés du type (F,σ,f) sont toujours géométriques (c'est-à-dire coordonnent toujours un plan projectif).

Théorème 4.

Soit F un corps commutatif et K un semi-corps de Cayley-Dickson généralisé du type (F,σ,f) . Alors "le" dérivé de K relativement au corps F est géométrique. (Plus précisément, est un système V.W à droite).

Démonstration : Le dérivé ∂K du semi-corps $K = (F,\sigma,f)$,relativement au corps F est l'espace vectoriel $F+tF$ muni du produit $*$ défini par :

$$\begin{cases} (\eta_1+t\xi_1)*\lambda_2 = \eta_1\lambda_2 + t\xi_1\lambda_2 \ ; \ \eta_1,\xi_1,\lambda_2 \in F \\ (\eta_1+t\xi_1)*(\lambda_2+t\lambda_1) = \lambda_2[\eta_1^{\bar\sigma^1} - \xi_1^{\bar\sigma^1}\lambda_2^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1}] + f(\xi_1^{\sigma}\lambda_1^{-\sigma}) \\ \qquad\qquad + t\lambda_1[\eta_1^{\bar\sigma^1} - \xi_1^{\bar\sigma^1}\lambda_2^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1}] \quad , \ \eta_1,\xi_1,\lambda_2,\lambda_1 \in F \ , \ \lambda_1 \neq 0 \ . \end{cases}$$

Ce produit est distributif à droite (proposition 2, chapitre IV), donc pour que le système ∂K soit géométrique, il faut et il suffit (proposition 1, chapitre III), que les applications 1°) $x \mapsto x*a$ et $x \mapsto a*x$, 2°) $x \mapsto x*b-x*a$, soient des permutations de l'ensemble $F+tF$, pour tous a,b dans $F\setminus\{0\}$, $a \neq b$.

1°) Si a est un élément non nul de F , les applications $x \mapsto a*x$ et $x \mapsto x*a$ sont évidemment bijectives. Supposons donc : $a \notin F$. Le groupe des F-automorphismes du dérivé ∂K du semi-corps $K = (F,\sigma,f)$ étant complet (proposition 10, chapitre IV), il existe un F-automorphisme φ de ∂K tel que $\varphi(a) = t$. Ainsi, il nous suffit de montrer que les deux applications i) : $x \mapsto x*t$, ii) $x \mapsto t*x$, sont bijectives.

i) L'application : $x \mapsto x*t$ est bijective. En effet, l'équation en η_1 , ξ_1 : $(\eta_1+t\xi_1)*t = \eta+t\xi$ possède, quels que soient η,ξ fixés, une solution unique en η_1,ξ_1 qui est : $\xi_1 = \bar\sigma^1 \circ \bar f^1(\eta)$ et $\eta_1 = \xi^{\sigma}$.

ii) L'application $x \mapsto t_*x$ est bijective : résolvons en effet l'équation en λ_2, λ_1 : $t*(\lambda_2+t\lambda_1) = \eta+t\xi$ (1) . Si $\eta = 0$, cette équation possède une solution qui est : $\lambda_2 = \xi$, $\lambda_1 = 0$. Si $\lambda_2+t\lambda_1$ était une autre solution, nécessairement λ_1 serait non nul et le couple (λ_2,λ_1) serait solution du système :

$$\begin{cases} -\lambda_1\lambda_2^{\sigma^{-1}}\lambda_1^{-\sigma^{-1}} = \xi \\ \lambda_2\lambda_2^{\sigma^{-1}}\lambda_1^{-\sigma^{-1}} = f(\lambda_1^{-\sigma}) \end{cases} .$$

Mais alors l'équation $f^\sigma(x) = x\lambda_2\lambda_2^\sigma$ aurait deux solutions distinctes, ce qui est impossible d'après le théorème 1.

Nous pouvons supposer $\eta \neq 0$. Les solutions $\lambda_2+t\lambda_1$ de l'équation (1) ne peuvent appartenir à F . L'équation (1) est donc équivalente au système :

$$\begin{cases} -\lambda_2\lambda_2^{\sigma^{-1}}\lambda_1^{-\sigma^{-1}} + f(\lambda_1^{-\sigma}) = \eta \\ -\lambda_1\lambda_2^{\sigma^{-1}}\lambda_1^{-\sigma^{-1}} = \xi \end{cases} \qquad (1)'$$

c'est-à-dire au système :

$$\begin{cases} \lambda_2^{\sigma^{-1}} = -\xi\lambda_1^{-1}\lambda_1^{\sigma^{-1}} \\ -\xi\xi^\sigma\lambda_1^{-\sigma} + f(\lambda_1^{-\sigma}) = \eta \end{cases} \qquad (1)''$$

D'après le théorème 1, ce système a une solution unique. L'application $x \to t_*x$ est donc bijective.

2°) Les applications $x \mapsto x*b - x*a$, $a,b \in F\setminus\{0\}$, $a \neq b$, sont bijectives. Si les éléments a et b sont dans F alors : $x_*b - x*a = x*(b-a)$ et l'on est ramené au cas précédent. Supposons $b \notin F$ (le cas $a \notin F$ s'y ramène). Le groupe des F-automorphismes du ternaire dérivé ∂K étant complet, on peut se restreindre à la résolution des équations : $x*t - x*a = c$ (3) $(a \neq t)$. Soit pour commencer : $a \in F$. L'équation (3) s'écrit, en posant $x = \eta_1 + t\xi_1$ et $c = \eta + t\xi$:

$$\begin{cases} f(\xi_1^\sigma) - \eta_1 a = \eta \\ \eta_1^{\sigma^{-1}} - \xi_1 a = \xi \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \eta_1 = (\xi+\xi_1 a)^\sigma \\ f(\xi_1^\sigma) = \xi_1^\sigma a^\sigma a + \xi^\sigma a + \eta \end{cases} .$$

Ce système ayant une solution unique en (η_1,ξ_1) (d'après le théorème 1), le cas $a \in F$ est réglé. Il nous reste donc à étudier le cas $a = \lambda_2 + t\lambda_1 \notin F$, c'est-à-dire $\lambda_1 \neq 0$. L'équation (3) est alors équivalente au système :

$$\begin{cases} f(\xi_1^\sigma) - \lambda_2[\eta_1^{\sigma^{-1}} - \xi_1^{\sigma^{-1}}\lambda_2^{\sigma^{-1}}\lambda_1^{-\bar\sigma^1}] - f(\xi_1^\sigma\lambda_1^{-\sigma}) = \eta \\ \eta_1^{\bar\sigma^1} - \lambda_1[\eta_1^{\bar\sigma^1} - \xi_1^{\bar\sigma^1}\lambda_2^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1}] = \xi \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f[\xi_1^\sigma(1-\lambda_1^{-\sigma})] - \lambda_2\eta_1^{\sigma^{-1}} + \xi_1^{\bar\sigma^1}\lambda_2^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1}\lambda_2 = \eta \\ \eta_1^{\bar\sigma^1} = (1-\lambda_1)^{-1}(\xi-\lambda_1\xi_1^{\bar\sigma^1}\lambda_2^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1}) \quad \text{puisque} \quad \lambda_1 \neq 1 . \end{cases}$$

Ce dernier système est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} f[\xi_1^\sigma(1-\lambda_1^{-\sigma})] + \xi_1^{\bar\sigma^1}(1-\lambda_1)^{-1}\lambda_2\lambda_2^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1} = \eta + (1-\lambda_1)^{-1}\lambda_2\xi \\ \eta_1^{\bar\sigma^1} = (1-\lambda_1)^{-1}[\xi-\lambda_1\xi_1^{\bar\sigma^1}\lambda_2^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1}] . \end{cases}$$

Or, la première équation du système précédent, peut s'écrire :

$$f[\xi_1^\sigma\lambda_1^{-\sigma}(\lambda_1^\sigma-1)] + \xi_1^{\bar\sigma^1}\lambda_1^{-\bar\sigma^1}(1-\lambda_1)^{\bar\sigma^1}(1-\lambda_1)^{-1}(1-\lambda_1)^{-\bar\sigma^1}\lambda_2\lambda_2^{\bar\sigma^1} = \eta+(1-\lambda_1)^{-1}\lambda_2\xi .$$

C'est-à-dire, en posant : $x = \xi_1\lambda_1^{-1}(\lambda_1-1)$, $\alpha = \lambda_2\lambda_2^\sigma(1-\lambda_1)^{-1}(1-\lambda_1)^{-\sigma}$, $\eta + (1-\lambda_1)^{-1}\lambda_2\xi = b^{\bar\sigma^1}$, et en appliquant σ : $f^\sigma(x^\sigma) = x\alpha + b$. L'élément α étant de la forme $\lambda\lambda^\sigma$, cette équation a bien une solution unique en x (théorème 1). Ceci achève la démonstration du théorème 4. //

Exemples.

1) Les corps $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ des complexes et des quaternions sont des semi-corps (F,σ,f) dérivables particuliers (voir chapitre IV, §3). Leur dérivé est donc géométrique. Ceci n'est pas nouveau pour le cas du corps $\mathbb{C}$,

puisque nous avons vu que "son" dérivé était un système de Hall que l'on sait géométrique (voir l'exemple qui suit la proposition 2 du chapitre IV).

2) Les semi-corps des exemples 2 et 3 cités après le théorème 2 sont dérivables et "leur" dérivé est géométrique.

3) Kirkpatrick ([Ki]) a construit récemment une classe de plans projectifs finis comprenant la classe des plans projectifs coordonnés par les systèmes de Hall (finis) construits sur un corps de caractéristique $\neq 2$. Or les systèmes V.W à droite dont il se sert pour obtenir ces plans, se trouvent être les dérivés des semi-corps de Cayley-Dickson généralisés du type (F,σ,f) , pour $f = x \mapsto sx^{\alpha}$, où α est un automorphisme du corps F , et s un élément de F . La dérivation des semi-corps (F,σ,f) nous donne donc, d'une part une généralisation, dans le cas fini des systèmes de Kirpatrick et d'autre part, une extension de ces mêmes systèmes au cas infini.

Il reste le problème de savoir si les semi-corps de Cayley-Dickson généralisés et leurs dérivés coordonnent de nouveaux plans projectifs. Ceci est probable mais non immédiat car des systèmes V.W non isotopes peuvent coordonner des plans projectifs isomorphes. Cependant, on peut montrer (d'une manière analogue à celle du théorème 3) que les plans projectifs coordonnés par les semi-corps $D(h,r,s,\lambda)$ ne sont isomorphes à aucun des plans cités dans le livre de Dembowski : "Finite Geometries" 1968.

INDEX DES NOTATIONS

$\bar{a}$	p. 20	(F,σ,f)	p. 56
a^{*i}	p. 17	(F,σ,f,g)	p. 56
$\tilde{a}$	p. 18	(F,σ,φ,ψ)	p. 51
$\bar{a}^i$	p. 27	$(F,\sigma,\alpha,\beta,s)$	p. 50
$\underline{a}_i$	p. 27	(K,F,T)	p. 44
AB	p. 20	$\partial(K,F,T)$	p. 45
$[A,B]$	p. 20	$(\wp,\mathfrak{L},\epsilon)$	p. 1
$[A,B]_i$	p. 27	$P_2(K)$	p. 2
$A_2(K)$	p. 2	π	p. 1
$Aut(\pi)$	p. 3	$\pi(\{\epsilon_i\}_{i\in I},\{I_j\}_{j\in I})$	p. 19
$D(h,r,s,\lambda)$	p. 68	$\bar{\pi}$	p. 21
ϵ	p. 16	$\bar{\pi}(\{\epsilon_i\}_{i\in I},\{I_j\}_{i\in I})$	p. 20
$\partial\epsilon$	p. 16	$\bar{\pi}(G,\epsilon,I)$	p. 25
$\mathcal{J}(\epsilon)$	p. 17	$T(x,m,b)$	p. 9
		$\mathcal{T}$	p. 5

INDEX TERMINOLOGIQUE

Addition (associée à un ternaire) p.12
admissible (groupe) p.25
affine (plan) p. 2
Alternatif (semi-corps) p.14
Automorphisme (d'un plan projectif) p. 3
Antiautomorphisme (d'un corps) p.51
Arguésien (plan) p. 5
Associatif pour les puissances p.14
Autotopisme p.10
Axe p. 3
Boucle p.12
Cayley-Dickson (procédé de) p.55
Centrale (collinéation) p. 3
Centre (d'une collinéation) p. 3
Centre (d'un système V.W) p.31
Collinéation p. 3
Complet (groupe d'automorphismes) p.55
Complétion (projective) p. 2
Décroissante (application) p.36
Dérivable (plan, ternaire) p.44
Dérivé p.45
Discret(groupe de transformations) p.25
Dual (plan) p. 2
Desargues (configuration de) p. 5
Elation p. 4
Géométrique (Ternaire) p.11
Homologie p. 4
Hilbert (plan de) p.20
Isomorphisme (de plans projectifs) p. 3
Isotopisme p.10
Large (classe) p. 7
Lenz-Barlotti (classification de) p. 5
Linéaire (Ternaire) p.13
Multiplication (associée à un ternaire) p.12
Nearfield p.13
Nodule p.32
Noyau p.31
Noyau à droite p.31
Noyau à gauche p.31
Noyau médian p.31
Ordre (d'un plan projectif) p. 3
Projectif (plan) p. 1
Projectif (groupe) p. 4
Projectif (petit groupe) p. 4
Quadratique (corps) p.66
Quadratique (système V.W) p.32
Repère p. 8
Rigide (plan) p.15
Semi-corps p.13
Système de Cayley-Dickson généralisé p.56
Système élatif p.13
Système de Hall p.32
Système homologique p.13
Système de Knuth p.50
Système de Kirkpatrick p.60
Système de Veblen-Wedderburn à droite p.13
Système de Veblen-Wedderburn à gauche p.13
Ternaire p.10
(P,ℓ) Transitif (plan) p. 4
Translation (plan de) p. 7

LEXIQUE

Terminologie employée ici	Autre terminologie
Collinéation	Projectivité (Baer 1952)
Collinéation centrale	Collinéation perspective (Veblen et Young 1916)
Nodule	Noyau faible (Knuth 1965)
Semi-corps	Système V.W distributif (Pickert 1955) ; anneau à division non associatif (Hall 1959)
Système de Veblen-Wedderburn ; Système V.W	quasi-corps (Dembowski 1968)
Système élatif	Groupe cartésien (Pickert 1955)
Système homologique	Groupe anticartésien (Yaqub 1961)
Ternaire géométrique	Corps Ternaire (Dembowski 1968), anneau Ternaire (Hall 1959), anneau ternaire géométrique (Hughes 1955)

BIBLIOGRAPHIE

[A] - ALBERT - The finite planes of Ostrom. Bol. Soc. Mat. Mexicana 11 (1966) pp. 1 à 13.

[B] - BARLOTTI - Le possibili configurazioni del sistema delle coppie punto-retta (A,a) per cui un piano grafico risulta (A,a) transitivo. Boll UMI (3) vol.12 (1957) pp. 212-226.

[C] - CARLITZ - A theorem on permutations in a finite field. P.A.M.S. 2 (1960) pp. 456-459.

[D] - DEMBOWSKI - Finite geometries. Springer Verlag (1968).

[F] - FOULSER - On finite affine planes and their collineations groups,thesis (1963) (University of Michigan).

[Ha] - M. HALL - The theory of groups. The Mac Millan Company (1959)

[He] - HERSTEIN - Non commutative rings. John Wiley and sons Inc. (1968).

[Hi] - HILBERT - Grundlagen der Geometrie. 1. Aufl. Berlin (1899).

[J] - JOHNSON - Translation planes constructed from semi-field planes. Pac. J. of Math. vol.36, n°3 (1971) pp. 701-711.

[Ki] - KIRKPATRICK - Generalization of Hall planes of odd orders. Bull. Aust. Math. Soc. 4 (1971) pp. 205-209.

[Kn] - KNUTH - Finite semi-fields and projective planes. J. Alg. 2 (1965) pp. 182-217.

[O.M] - OSTROM & MORGAN - Coordinate systems of some semi-translation planes. Trans. A.M.S. 11 (1964) pp.19-32.

[Pi] - PICKERT - Projecktive Ebenen. Springer Verlag (1965).

[Pa] - PANELLA - Isomorfismo tra piani di traslazione di Marshall Hall. Ann. Mat. Pur. appl. 47 (1959) pp. 169-180.

[Sa] - SALZMANN - Topological planes. Advances in Math. Vol. 2 Fasc. 1 (1967).

[Sc] - SCHAFER - Introduction to non associative algebras. Academic Press (1966).

-o00o-

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphi
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Sémélologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique Industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VPOUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	YACOUB Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 Mai 1972

VU,

Grenoble, le

Le Président de la thèse,

C. CHABAUTY

VU, et permis d'imprimer

Grenoble, le

Le Président de l'Université scientifique
et médicale,

M. SOUTIF